ILIE BURDUJAN

CAPITOLE DE MATEMATICI APLICATE PENTRU BIOLOGI

Editura Vasiliana '98

IAŞI 2002

ILIE BURDUJAN

CAPITOLE DE
MATEMATICI APLICATE
PENTRU BIOLOGI

Editura *Vasiliana* '98
IAŞI 2002

Scanned with OKEN Scanner

ILIE BURDUJAN

CAPITOLE DE MATEMATICI APLICATE PENTRU BIOLOGI

Editura Vasiliana '98
IAŞI 2002

Scanned with OKEN Scanner

Coperta şi subcoperta: Ilie BURDUJAN

Referenți ştiințifici: Prof. Dr. Alexandru NEAGU
Univ. Tehnică „Gh. Asachi"- Iaşi
Prof. Dr. Ioan TOFAN
Univ. „Al. I. Cuza" - Iaşi

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale

BURDUJAN ILIE
Capitole de Matematici aplicate pentru biologi/ Ilie Burdujan -Iaşi
Editura Vasiliana '98
288P., 35fig., 24cm Bibliografie
ISBN: 973-85547-9-9

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Ideia fundamentală a pitagoreicilor era că esența lucrurilor se reduce la număr și la anumite legi exprimabile cu ajutorul relațiilor numerice. Biologii nu au putut ignora importanța acestei idei obligați mai ales de volumul imens de informații descriptive ce trebuiesc mereu reanalizate și reconsiderate. În celebra sa carte ,,Introducere în studiul medicinei experimentale'' (1865) Claude Bernard scria ,,*În științele experimentale, măsurarea fenomenelor este o problemă fundamentală deoarece legea fenomenului se stabilește tocmai prin determinarea cantitativă a efectului în funcție de cauza dată. Prin urmare, dacă vrem să ajungem în biologie la cunoașterea legilor vieții trebuie nu numai să observăm și să constatăm fenomenele vitale ci și să precizăm prin numere relațiile de intensitate în care se găsesc unele în raport cu celelalte. Această aplicare a matematicilor la fenomenele naturii reprezintă scopul oricărei științe* ''. Se recunoaște cu ușurință o reactualizare a ideii pitagoreicilor la o diferență pe axa timpului de aproape două milenii. Biologii au recurs preferențial și dominant la mijloacele statisticii care au avantajul că sunt ușor de asimilat și ușor de mânuit. Practicianul este obligat existențial să adapteze rezultate ale statisticii matematice sub imperiul faptului că numărul de repetări efective ale experiențelor de interes este totdeauna finit, în vreme ce rezultatele statisticii matematice sunt de regulă efectul unor treceri la limită. Prin urmare, practicianul va aproxima limita unui șir din modelul statistic acceptat cu un termen al șirului. A invoca statistica matematică pentru a da credibilitate unei afirmații extrase pe baza rezultatelor efectuării repetate (finit) a unei experiențe este incorect. În fapt, **tehnicile statisticii aplicate** (nu ale statisticii matematice) **sunt convenții rezonabile ale practicienilor și nu sunt demonstrații ale unor concluzii sugerate de analiza rezultatelor.** Acesta este motivul pentru care credibilitatea statisticii aplicate este serios pusă la îndoială. De aceea se pune acut problema modelizării matematice a fenomenelor din domeniul biologiei. Trebuie înțeles că aplicarea matematicii în vederea creării unor modele matematice ale unor fenomene, indiferent de domeniul în care se desfășoară acestea, impune o cunoaștere minimală a unei părți a limajului matematic precum și a unor tehnici specifice de lucru. Acesta este scopul prezentei cărți. Ea se constituie de fapt într-un compendiu de mate-

Scanned with OKEN Scanner

matici aplicate. S-au prezentat noţiuni şi rezultate fundamentale din opt ramuri ale matematicii utilizate deseori implicit iar alteori explicit în studiile din biologie. Pentru delimitarea clară a sferelor noţiunilor introduse se folosesc multe exemple. În vederea acomodării cu tehnicile de lucru specifice matematicii sunt incluse în text probleme rezolvate, multe dintre ele fiind chiar aplicaţii în biologie. Există multe exerciţii propuse cititorilor. Cititorii dornici să completeze documentarea sunt conduşi prin trimiteri exacte la materialele din bibliografie. Rezultatele sunt însoţite de comentarii şi de reprezentări grafice acolo unde este cazul.

În carte se pot distinge trei părţi: o parte de pregătire matematică generală (formată din primele trei capitole), o parte de teoria optimizării (cap.III şi IV) şi o parte de teoria probabilităţilor.

Bibliografia este selectivă şi minimală.

Cartea se adresează studenţilor şi cercetătorilor cu preocupări în aplicarea matematicii în biologie.

În încheiere doresc să mulţumesc referenţilor pentru rija cu care au parcurs materialul şi pentru sugestiile preţioase pe care mi le-au făcut.

Mulţumesc anticipat tuturor celor care, după parcurgerea acestei cărţi, îmi vor semnala eventualele greşeli de orice natură sau neîmpliniri, precum şi celor care îmi vor da sugestii de îmbunătăţire a materialului.

Autorul

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Capitolul I. MULȚIMI. RELAȚII. FUNCȚII.....

§1. Mulțimi..... 1
§2. Relații binare..... 5
1°. Definiții. Exemple..... 5
2°. Relații de echivalență..... 8
3°. Relații de ordine..... 8
Elemente direct comparabile..... 10
Diagrama Hasse..... 10
§3. Funcții..... 11
1°. Definiții. Exemple..... 11
2°. Moduri de a defini o funcție..... 12
3°. ...Procedeie de introducere a funcțiilor în cercetarea din Biologie 13
a) Ajustarea prin funcții polinomiale..... 13
b) Construcția de polinoame de interpolare.... 21
§4. Frecvențe 23
§5. Caracteristici numerice ale mulțimii valorilor unei funcții reale..... 27
a) Caracteristici numerice de poziție..... 27
1°. Media valorilor unei funcții..... 28
Calculul mediei (metoda zeroului fals)..... 29
2°. Mediana..... 30
3°. Valoarea modală..... 30
4°. Momente 31
Aplicație..... 32
b) Caracteristici numerice de împrăștiere..... 34
1°. Amplitudinea..... 34
2°. Dispersia..... 34
3° Cuartile 35
4°. Inegalitatea lui Cebîșev..... 36
c) Alte caraeteristici numerice ale unei funcții 37
1°. Coeficientul de variabilitate 37

Scanned with OKEN Scanner

2°. Coeficienţii de asimetrie Pearson şi Fisher..... 38
3°. Coeficientul de boltire / aplatizere..... 38
d) Caracteristici numerice pentru familii de funcţii..... 40
1°. Covarianţa a două funcţii (caractere)..... 40
2°. Matricea de covarianţă a p funcţii..... 42
3°. Regresia liniară..... 43
Aplicaţie..... 44

Capitolul II. ELEMENTE DE ALGEBRĂ ABSTRACTĂ..... 49
§1. Lege de compoziţie..... 49
§2.Parte stabilă. Lege de compoziţie indusă 51
§3. Structuri algebrice de bază..... 51
Aplicaţii ale grupurilor..... 53
Aplicaţie în genetică..... 54
§3. Pătrate latine..... 57
Aplicaţii ale pătratelor latine..... 58

Capitolul III. SPAŢII VECTORIALE..... 61
§1. Spaţii vectoriale..... 61
1°. Definiţii. Exemple 61
2°. Lema substituţiei..... 65
§2. Subspaţii vectoriale..... 69
1°.Definiţii. Exemple..... 69
2°. Rangul unui sistem de vectori..... 70
3°. Rangul unei matrice..... 71
4°. Inversarea matricelor..... 73
5°. Calculul determinanţilor..... 78
6°. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare..... 79

Capitolul IV. ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ..... 85
§1. Metoda simplex de rezolvare a problemelor 85

Scanned with OKEN Scanner

de programare liniară .....
1°. Probleme care conduc la programe liniare..... 85
a) Problema repartiției eficiente a resurselor limitate..... 86
b) Reartiția optimă a culturilor agricole..... 88
c) Problema dietei..... 89
d) Problema amestecului..... 91
2°. Algoritmul Simplex..... 92
3°. Metoda celor două faze..... 97
4°. Dualitatea în programarea liniară.....-..... 101
§2. Problema transporturilor..... 107
1°. Modelul matematic al problemei transporturilor..... 107
2°. Rezolvarea problemei transporturilor..... 109
2°. Determinarea unei soluții admisibile de bază nedegenerate 111
3°. Ameliorarea unei soluții admisibile de bază nedegenerate..... 115
4°. Rezolvarea unor probleme de transport neechilibrate..... 121

Capitolul V. ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR..... 129
§1. Grafuri orientate..... 129
1°. Definiții. Exemple..... 129
2°. Arbori şi arborescențe..... 133
§2. Grafuri neorientate..... 135
§.3 Probleme de optim în grafuri..... 136
1°. Problema arborelui parțial minimal/maximal.. 137
2°. Problema drumului minim/maxim..... 138
§4. Rețele de transport..... 150

Capitolul VI. CÂMPURI DE PROBABILITATE..... 155
§1. Experiențe aleatoare. Evenimente aleatoare..... 156
§2. Algebre Boole de evenimente..... 159
§3. Definiția clasică a probabilității..... 160
§4. Câmpuri de evenimente..... 162

Scanned with OKEN Scanner

§5. Funcții de probabilitate 164
§6. Probabilități condiționate..... 168
§7. Probabilitatea evenimentelor dependente
Inegalitatea lui Boole..... 174
§8. Formula probabilității totale
Formula lui Bayes..... 175
§9. Scheme probabilistice clasice..... 178
1°. Schema Poisson..... 178
2°. Schema binomială (Bernoulli)..... 179
3°. Schema multinomială..... 181
4°. Schema hipergeometrică..... 182

Capitolul VII. VARIABILE ALEATOARE..... 185
§1. Definiții. Exemple..... 185
§2. Operații cu variabile aleatoare..... 190
§3. Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare..... 191
§4. Vectori aleatori..... 196
§5. Funcția de repartiție a unui vector aleatar..... 197
§6. Caracteristici numerice ale unei variabile
aleatoare..... 201
a) Caracteristici numerice de poziție..... 201
1°. Modul..... 201
2°. Mediana..... 202
3°.Cuantilele..... 203
4°.Media unei variabile aleatoare..... 204
b) Caracteristici numerice de împrăștiere..... 206
1°. Amplitudinea..... 206
2°. Dispersia..... 206
3°.Coeficientul de variabilitate Pearson..... 207
c) Alte caracteristici numerice..... 208
1°. Coeficientul de asimetrie Pearson..... 208
2°.Coeficientul de aplatizare Pearson..... 209
§7. Măsuri ale gradului de dependență al variabilelor
aleatoare..... 210
a) Independența variabilelor aleatoare..... 210
b) Dependența funcțională a variabilelor
aleatoare..... 211

Scanned with OKEN Scanner

c) Dependența în sens ptrobabilist a variabilelor aleatoare..... 213
§8. Funcția caracteristică a unei variabile aleatoare 216
§9. Funcția cgeneratoare a unei variabile aleatoare.. 218
§ 10. Funcția cgeneratoare a momentelor..... 220

Capitolul VIII PRINCIPALELE DISTRIBUTII TEORETICE..... 221

§1. Legi discrete..... 221
1°. Legea discretă uniformă..... 221
2°. Legea Bernoulli de parametru p..... 222
3°. Legea (distribuția) binomială B(n, p)..... 222
4°. Legea (distribuția) binomială cu exponent negativ..... 228
5°. Legea (distribuția) hipergeometrică..... 229
6°. Legea (distribuția) Poisson..... 231
7°. Legea (distribuția) geometrică. Legea lui Pascal..... 236
8°. Legea (distribuția) multinomială..... 238
§2. Distribuții de tip continuu..... 239
1°. Distribuția uniformă pe intervalul [a, b]..... 239
2°. Distribuția Gama..... 240
3°. Distribuții Beta..... 241
4°. Distribuția normală..... 244
5°. Distribuția log-normală..... 251
6°. Distribuția normală multidimensională..... 252
7°. Distribuția χ^2..... 252
8°. Distribuția Student..... 255
9°. DistribuțiaSnedecor. Distribuția Fisher..... 257
10°. DistribuțiaWeibull. Legea exponențială..... 259
11°. DistribuțiaErlang..... 260
12°. DistribuțiaGumbel..... 261
13°. Repartiția Pareto..... 262
14°. Repartiția Laplace..... 262
15°. Legea lui Wishart..... 263
16°. Legea T^2 a lui Hotelling..... 263
§3. Convoluția..... 264
§4. Șiruri de variabile aleatoare..... 264

Scanned with OKEN Scanner

§5. Legea numerelor mari. Teorema limită centrală... 268
§6. Corecția de continuitate..... 272

BIBLIOGRAFIE..... 281

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

MULȚIMI. RELAȚII. FUNCȚII

Noțiunea de mulțime este una dintre noțiunile fundamentale ale Matematicii. În toate domeniile Matematicii se operează cu mulțimi: în Geometrie se folosesc mulțimi ale căror elemente sunt puncte, în Aritmetică se folosesc mulțimi de numere, în Calculul variațional se folosesc mulțimi de funcții, etc.. Obiectul teoriei mulțimilor este studiul proprietăților mulțimilor din punctul de vedere cel mai general. Mai exact, se studiază proprietăți ale mulțimilor independente de natura elementelor lor.

Mulțimile apar implicit sau explicit pretutindeni în universul în care existăm. Populațiile biologice (staționare) sunt exemplele de mulțimi cele mai obișnuite și mai ușor de perceput.

§1. Mulțimi

Prin mulțime vom înțelege o colecție de obiecte dintr-un univers $\mathcal{U}$ ce este considerată ca o entitate (un tot). Faptul că un obiect din universul $\mathcal{U}$ intră în componența unei mulțimi îi conferă acestuia calitatea de element. De obicei mulțimile vor notate cu litere mari, iar elementele lor – cu litere mici; vor exista și excepții motivate de specificul domeniului aplicației (vezi Exemplele 1 și 2); uneori literele sunt însoțite de indici numerici sau de alte semne grafice.

A da o mulțime înseamnă a-i preciza elementele constitutive; prin urmare trebuie cunoscută o regulă pe baza căreia să putem recunoaște dacă un obiect din univers este sau nu element constitutiv al unei anumite mulțimi. Există trei moduri (care nu sunt independente) de a da o mulțime:

a) *enumerând elementele mulțimii*

b) *indicând o proprietate caracteristică $\mathcal{P}$ a mulțimii*

c) *descriptiv*

Exemplul 1. a) $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B=\{AA, Aa, aa\}$, $C=\{-1, 3, 7\}$, $\mathbb{N}^* =\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$,

Scanned with OKEN Scanner

b) $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x^2-3x+2=0\}$–adică mulţimea numerelor naturale care sunt soluţii ale ecuaţiei $x^2-3x+2=0$.
c) *mulţimea alelelor unei gene, mulţimea cromozomilor dintr-o celulă de cartof, mulţimea familiilor cu origine comună sau înrudite printr-o ramură comună a trunchiului filogenetic* (=definiţia *ordinului* ca taxon) etc..

Exerciţiul 1. Pentru fiecare din cele trei moduri a), b), c) de a da o mulţime, daţi exemple de mulţimi care apar în legătură cu preocupările dumneavoastră.

Apartenenţa. Dacă elementul **a** este element constitutiv al mulţimii **A** scriem $a \in A$ şi citim "**a** *aparţine lui* **A**"; în caz contrar scriem $a \notin A$ şi citim "**a** *nu aparţine mulţimii* **A**".

Exerciţiul 2. Dacă **A** este caracterizată de proprietatea $\mathcal{P}$ explicaţi ce înseamnă "$a \in A$" şi "$b \notin A$".

Egalitatea. Dacă simbolurile **a** şi **b** notează acelaşi element al unei mulţimi scriem $a = b$ şi citim "**a** *este egal cu* **b**"; notaţia $a \neq b$ arată că cele două simboluri reprezintă două elemente diferite şi se citeşte "**a** *este diferit de* **b**".

Dacă simbolurile **A** şi **B** reprezintă aceeaşi mulţime scriem $A = B$ şi citim "*mulţimea* **A** *este egală cu mulţimea* **B**".

Remarca 1. Dacă **A** este dată prin proprietatea caracteristică $\mathcal{P}$ iar **B** este dată prin proprietatea caracteristică $\mathcal{Q}$, egalitatea $A = B$ înseamnă că proprietăţile $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{Q}$ sunt echivalente din punctul de vedere al logicii. De exemplu, dacă **A** este mulţimea tuturor paralelogramelor care au diagonale egale iar **B** este mulţimea tuturor paralelogramelor care au un unghi drept, atunci $A = B$.

Este de uz comun sintagma: *două mulţimi sunt egale dacă şi numai dacă au aceleaşi elemente constitutive*.

Exerciţiul 3. Se consideră mulţimile $A=\{-1, 1, 2\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^3-2x^2-x+2=0\}$ şi $C=\{x\in\mathbb{N} \mid x^3-2x^2-x+2=0\}$. Verificaţi că $A=B$. Este corectă afirmaţia $A=C$?

Incluziunea. Se spune că mulţimea **A** *este inclusă în mulţimea* **B** dacă orice element din **A** este şi element al lui **B** ; scriem în acest caz $A \subset B$ sau $B \supset A$. Are loc echivalenţa:

Scanned with OKEN Scanner

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Simbolul $A \not\subset B$ înseamnă că **A** *nu este parte a lui* **B**, adică există cel puţin un element în **A** care nu este element al lui **B.**

Exemplul 2. Mulţimea păsărilor din familia *Ardeidelor* formează o submulţime a mulţimii păsărilor din ordinul *Ciconiiformes;* vom scrie pe scurt *Ardeidae* $\subset$ *Ciconiiformes* adică lucrăm cu convenţia că mulţimile de indivizi dintr-o familie, ordin, etc. vor purta numele familiei, ordinului, etc..

Exerciţiul 4. Daţi exemple de mulţimi şi de părţi de mulţimi care apar în Biologie.

Mulţimea vidă. Mulţimea care nu are nici-un element se numeşte *mulţime vidă* şi se notează cu $\varnothing$. Prin **definiţie** $\varnothing$ *este parte a oricărei mulţimi* (adică $\varnothing \subset A$, $\forall$ **A**).

Mulţimea părţilor unei mulţimi. Se notează cu $\mathcal{P}(A)$ mulţimea tuturor părţilor mulţimii **A**. Evident $\varnothing$, $A \in \mathcal{P}(A)$; ele se numesc *submulţimile improprii* ale mulţimii **A**. De exemplu, pentru mulţimea $A = \{1, 2, 3\}$ mulţimea părţilor $\mathcal{P}(A)$ este formată din părţile $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.

Generări de submulţimi. Oricărei perechi de submulţimi **B**, $C \in \mathcal{P}(A)$ i se asociază următoarele submulţimi ale mulţimii **A**:

$B \cup C = \{x \in A \mid x \in B$ *sau* $x \in C\}$ = *reuniunea lui* **B** *cu* **C**

$B \cap C = \{x \in A \mid x \in B$ *şi* $x \in C\}$ = *intersecţia lui* **B** *cu* **C**

$B \setminus C = \{x \in A \mid x \in B$ *şi* $x \notin C\}$ = *diferenţa dintre* **B** *şi* **C**

$B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ = *diferenţa simetrică dintre* **B** *şi* **C**

$C_A B = CB = A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ = *complementara lui* **B** *în* **A**.

Definim reuniunea familiei $\{A_i\}_{i \in I}$ de părţi ale mulţimii **A** (**I** fiind o mulţime - finită sau nu - de indici) ca fiind mulţimea formată din toate elementele care aparţin cel puţin unui membru al familiei de părţi. Reuniunea familiei $\{A_i\}_{i \in I}$ va fi notată cu $\bigcup_{i \in I} A_i$; în cazul particular $I = \{1,2,...,n\}$ se foloseşte notaţia $\bigcup_{i \in I} A_i \overset{not}{=} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Intersecţia fam-

Scanned with OKEN Scanner

iliei $\{A_i\}_{i\in I}$ va fi notată cu $\bigcap_{i\in I} A_i$ şi este formată din elementele comune tuturor mulţimilor din familie; în cazul particular $I=\{1,2,...,n\}$ se foloseşte notaţia $\bigcap_{i\in I} A_i \overset{not}{=} \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Exerciţiul 5. Se consideră mulţimile $A=\{x\in Z \mid |x|\le 2\}$, $B=\{x \in \mathbb{N} \mid 2x^3-5x^2+x+2\}$, $C=\{x\in\mathbb{N} \mid 3<x<4\}$. Să se determine:

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A\Delta B,\ C\setminus B,\ A\Delta C.$$

Mulţimi disjuncte. Două mulţimi care nu au elemente comune se numesc *mulţimi disjuncte*. Prin urmare, mulţimile **A** şi **B** sunt disjuncte dacă şi numai dacă $A\cap B=\varnothing$.

Exemplu: *Haematopodidae* $\cap$ *Charadriidae* $=\varnothing$.

Partiţia unei mulţimi. Se numeşte *partiţie* a mulţimii nevide **A** orice familie $\{A_i\}_{i\in I}$ (**I** fiind o familie oarecare de indici) de părţi *nevide* ale mulţimii **A** cu proprietăţile :

a) $A_i\cap A_j=\varnothing,\ \forall i\neq j,\ i,j\in I$, b) $A=\bigcup_{i\in I} A_i$.

Familia de părţi nevide $\{A_i\}_{i\in I}$ care acoperă **A** (adică satisface b)) este o partiţie a mulţimii **A** dacă fiecare element al mulţimii **A** aparţine cel mult unei părţi din această familie.

Exemplul 3. 1°. În avifauna ţării noastre, păsările din familiile *Ardeidae, Ciconiidae şi Threskiornitidae* dau o partiţie a mulţimii păsărilor ordinului *Ciconiiformes*.

2°. Culturile $C_1, C_2,..., C_n$ realizate de o exploatare agricolă vor conduce la o partiţie a terenului acestei exploatări.

Produsul cartezian. Se numeşte *produsul cartezian* al mulţimilor **A** şi **B** mulţimea notată cu $A\times B$, definită prin: $A\times B = \{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$. Dacă $B\equiv A$ atunci $A\times A$ se notează cu A^2 şi este mulţimea formată din toate perechile ordonate de elemente din **A**; în particular $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ este formată din toate perechile ordonate de numere reale. Submulţimea $\Delta_A=\{(x,x) \mid \forall x\in A\}\subset A^2$ se numeşte *diagonala* lui A^2. Produsul cartezian are proprietăţile:

a) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$, b) dacă $A\neq B$ atunci $A\times B\neq B\times A$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția produsului cartezian se poate extinde la orice familie finită de mulțimi $A_1, A_2,...,A_n$ prin:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2,..., x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2,..., x_n \in A_n\}.$$

Dacă $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, se folosește notația $\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{\text{nori}} = A^n$;

în particular, dacă $A = \mathbb{R}$, atunci $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ (produsul are **n** factori).

Dacă **A** și **B** sunt mulțimi de numere reale, produsul cartezian $A \times B$ se poate reprezenta grafic în felul următor: fiecare element $(x,y) \in A \times B$ se identifică cu punctul **P** din plan care, în raport cu un reper (ortogonal sau nu) **xOy**, are coordonatele **(x,y)**.

Exercițiul 6. Reprezentați grafic produsele carteziene $A \times B$, $A \times A$ unde $A=\{1,2,4\}$ și $B=\{2, 3, 4\}$. Marcați diagonala lui $A \times A$.

Exemplul 4. 1°. În taxonomie se măsoară valorile medii ale caracteristicilor unor specii de plante. Acestea sunt componente ale unor elemente dintr-un produs cartezian $\mathbb{R}^n$. De exemplu măsurând (în a 14-a zi de la răsărire) aria totală a frunzelor, masa frunzelor uscate și masa totală a plantei uscate pentru o serie de plante din specia *Browallia speciosa* s-au obținut rezultatele medii **2,4177 cm^2, 0,0070 g** și respectiv **0,0096g.** Aceste rezultate se constituie într-un element din $\mathbb{R}^3$ și anume **(2,4177 ; 0,0070 ; 0,0096).**

2°. Pentru o specie din genul *Larus* s-a determinat greutatea adultului în grame, vârsta maturității sexuale în ani și durata de incubație a ouălelor în zile. Se citează valorile: **1050 g, 4 ani, 28 zile**, adică se evidențiază componentele unui element din $\mathbb{R}^3$ și anume **(1050, 4, 28).**

§2. Relații binare

1. Definiții. Exemple

Între perechile de elemente ale unei populații se stabilesc diverse relații. Modelul matematic general al acestora este noțiunea de *relație binară*. Printre relațiile binare pe o mulțime se disting *relațiile de echivalență* (care apar implicit în orice activitate de clasificare) și *relațiile de ordine* (care se implică în orice activitate de ierarhizare). Ambele tipuri de relații sunt implicit utilizate în taxonomia filogenetică.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1. 1°. Se numește *relație binară* între mulțimile **A** și **B** orice triplet (ordonat) **R = (A, B, G)** unde $G \subset A \times B$.

Denumiri. **A** = *domeniul* relației **R**
B = *codomeniul* relației **R**
G = *graficul* relației **R**,
$D_R = \{x \in A \mid \exists\ y \in B$ *astfel încât* $(x, y) \in G\}$ = *domeniul strict* al relației binare **R**,
Im **R** $= \{y \in B \mid \exists\ x \in A$ *astfel încât* $(x, y) \in G\}$ = *imaginea* relației binare **R**.

Se vede că domeniul D_R este mulțimea formată din toate 1-componentele lui **G**, iar *Im* **R** este mulțimea formată din toate 2-componentele lui **G**

Notații. a) Dacă $(x, y) \in G$ scriem : **x R y**.
b) Dacă **A = B** scriem **R = (A, G)** în loc de **R = (A, A, G)**; în acest caz spunem că este dată *o relație între elementele mulțimii* **A** sau *o relație binară pe* **A**.

Este de remarcat existența unei corespondențe bijective între mulțimea relațiilor binare dintre două mulțimi **A** și **B** și mulțimea părților lui $A \times B$.

Exercițiul 7. a) Dați definițiile operațiilor uzuale cu relații binare: reuniunea, intersecția. b) Dați definiția inversei unei relații.
c) Definiți relația de incluziune între două relații.
Folosiți sugestia conținută în propoziția ce precede exercițiul.
Verificați-vă pe baza definițiilor din [1] pag. 20.

Date relațiile binare $R_1=(A, B, G_1)$ și $R_2=(B, C, G_2)$ pentru care *Im* $R_1 \subset D_{R_2}$ se definește relația binară $R_2 \circ R_1 = (A, C, G)$, numită *compusa relației* R_2 *cu* R_1, prin $G=\{(x,z) \in A \times C \mid \exists y \in B$ a.î. $(x,y) \in G_1, (y, z) \in G_2\}$.

Exemplul 5. Considerăm relațiile binare $R_1=(A, B, G_1)$ și $R_2=(B, C, G_2)$, unde $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{2, 3, 4\}$ și $C =\{1, 2, 3, 4\}$ iar graficele sunt $G_1=\{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (4, 4)\}$, $G_2=\{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$. Atunci $D_{R_1} = A$, $\text{Im } R_1 = B$, $D_{R_2} = B$ și $\text{Im } R_2 =\{1, 3, 4\}$. Deoarece $\text{Im } R_1 = D_{R_2}$ există $R_2 \circ R_1 = (A, C, G)$ unde $G=\{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1)\}$. Într-adevăr, $(1, 3) \in G_1$, $(3, 1) \in G_2$ implică

Scanned with OKEN Scanner

$(1, 1) \in G$, ş.a.m.d.. În plus, $R_1^{-1} = (B, A, G')$, cu G'={(2, 2), (3, 1), (4, 1), (4, 4)}.

Exerciţiul 8. Consideraţi relaţiile din exemplul precedent. Reprezentaţi grafic relaţiile R_1, R_2 şi $R_2 \circ R_1$; pe baza graficelor lui R_1 şi R_2 determinaţi graficul lui $R_2 \circ R_1$. Pe baza graficului relaţiei R_1 determinaţi graficul relaţiei $R_1 \circ R_1$ Există relaţia $R_2 \circ R_2$? În acelaşi sistem de coordonate reprezentaţi grafic, cu culori diferite, R_1 şi R_1^{-1}; ce remarcaţi?

Exerciţiul 9. Definiţi noţiunile:
- relaţie vidă şi relaţie totală între mulţimile A şi B,
- relaţie diagonală pe mulţimea A.

Controlaţi-vă pe baza manualului [1], pag. 18.

Exerciţiul 10. Se consideră relaţiile binare $R_1=(A, B, G_1)$ şi $R_2=(A, B, G_2)$ cu A={1, 2, 3}, B={1, 3, 4}, G_1={(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 4)} şi G_2={(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (3, 4)}. Determinaţi $R_1 \cup R_2$ şi $R_1 \cap R_2$. Sunt corecte afirmaţiile $R_1 \subset R_2$, $R_2 \subset R_1$?

Definiţia 2. Relaţia binară R = (A, G) se numeşte:
a) *reflexivă* dacă $(x,x) \in G$ oricare ar fi $x \in A$ (adică $\Delta_A \subset R$),
b) *simetrică* dacă din $(x, y) \in G$ rezultă $(y, x) \in G$ (adică $R = R^{-1}$),
c) *tranzitivă* dacă din $(x, y) \in G$ şi $(y, z) \in G$ rezultă $(x, z) \in G$(adică $R \circ R \subset R$),
d) *antisimetrică* dacă $((x, y) \in G$ şi $(y, x) \in G) \Rightarrow (x = y)$ (adică $R \cap R^{-1} \subset \Delta_A$).

Exerciţiul 11. Precizaţi, pentru fiecare dintre relaţiile următoare, care dintre proprietăţile a), b), c), d) sunt satisfăcute:
1°. R=(A,G) cu A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, G={(1, 1), (3, 3), (5, 5), (6, 6)},
2°. R=(A,G) cu A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, G={(1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 6), (6, 5)},
3°. R=(A,G) cu A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, G={(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 6), (2, 3),
(2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (5, 3), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 5), (6, 6)},
4°. R=(A,G) cu A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, G={(1, 2), (3, 4), (5, 6)}.
1°...a)..☐.,..b).☐. ,..c)☐..,.d).☐..(marcaţi căsuţele corespunzătoare răspunsurilor)
2°....a).☐..,..b)☐..,..c)☐..,.d).☐.

Scanned with OKEN Scanner

3°....a).□.,..b)□..,..c)□..,.d).□.
4°....a).□.,..b).□.,..c)□..,.d)□..

Reprezentaţi grafic cele patru relaţii binare. Interpretaţi geometric propriet[ţile lor (folosiţi eventual [1] pag.21).

2. Relaţii de echivalenţă

Relaţiile de echivalenţă stau la baza teoriilor de clasificare. Ele sunt uşor de identificat cu criteriile de clasificare.

Definiţia 3. Orice relaţie **R = (A, G)** care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă se numeşte *relaţie de echivalenţă* pe **A**.

Dacă **R = (A, G)** este o relaţie de echivalenţă şi **a∈A** atunci mulţimea

$$C_a = \{x \in A \mid (x, a) \in G\} = \{x \in A \mid x\ R\ a\}$$

se numeşte *clasa de echivalenţă a elementului* **a**. Două clase de echivalenţă ale relaţiei **R** sau sunt disjuncte sau coincid şi formează o partiţie a mulţimii **A**. Mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei **R** se numeşte *mulţimea factor* sau *mulţimea cât* a lui **A** relativ la **R** şi se notează cu **A/R**.

Exemplul 6. Pe mulţimea ***P*** a tuturor păsărilor dintr-un ecosistem ***E*** se pot defini (verificaţi!) următoarele relaţii de echivalenţă :

1) $aR_1\ b$ dacă şi numai dacă **a** şi **b** au acelaşi sex,
2) $aR_2\ b$ dacă şi numai dacă **a** şi **b** aparţin aceleiaşi specii.

MASC este clasa păsărilor de sex masculin şi **FEM** - clasa păsărilor de sex feminin, deci A/R_1={**MASC, FEM**}. A/R_2 este formată din mulţimea speciilor de păsări din ecosistem.

Exerciţiul 12. Verificaţi că relaţia binară **R=(A,G)** cu **A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, G={(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 5), (6, 3), (6, 4), (6, 6)}** este relaţie de echivalenţă. Determinaţi apoi mulţimea cât **A/R**. Folosind graficul lui **R**, interpretaţi rezultatele obţinute.

3. Relaţii de ordine

O relaţie **R = (A, G)** care este reflexivă şi tranzitivă se numeşte *relaţie de preordine* pe **A**. Orice relaţie **R = (A, G)** care este reflexivă,

Scanned with OKEN Scanner

antisimetrică şi tranzitivă se numeşte *relaţie de ordine* pe **A**; orice mulţime dotată cu o relaţie de ordine se numeşte *mulţime ordonată*.

Exerciţiul 13. Verificaţi că relaţia binară **R** = (**A**, **G**), unde **A**={**1**, **2**, **3**, **4**, **5**} şi **G**={(**1**, **1**), (**2**, **2**), (**3**, **3**), (**4**, **4**), (**5**, **5**), (**1**, **2**), (**1**, **3**) (**1**, **4**), (**1**, **5**), (**2**, **3**), (**2**, **4**), (**2**, **5**), (**3**, **2**), (**4**, **5**)} este o relaţie de preordine pe **A**. Folosiţi eventual reprezentarea grafică a relaţiei **R**. Apoi, verificaţi că relaţia binară **R** = (**A**, **G**), unde **A**={**1**, **2**, **3**, **4**, **5**} şi **G**={(**1**, **1**), (**2**, **2**), (**3**, **3**), (**4**, **4**), (**5**, **5**), (**1**, **2**), (**1**, **3**), (**1**, **4**), (**1**, **5**), (**2**, **3**), (**2**, **4**), (**2**, **5**), (**4**, **5**)} este o relaţie de ordine pe **A**.

Deoarece cel mai cunoscut exemplu de mulţime ordonată este $\mathbb{R}$ cu relaţia "$\leq$", se obişnuieşte ca, în consideraţiile teoretice, orice mulţime ordonată **A** să se noteze cu **A**($\leq$).

Definiţia 4. Fie **A**($\leq$) - o mulţime ordonată şi **B** $\subset$ **A** o parte nevidă. Atunci:

1°. un element $a \in A$ se numeşte *minorant* (resp. *majorant*) pentru **B** dacă pentru $\forall x \in B$, $a \leq x$ (resp. $x \leq a$),

2°. elementul $a \in A$ se numeşte *margine inferioară* (*superioară*) sau *infimum* (*supremum*) pentru **B**, şi se notează *inf* **B** (*sup* **B**), dacă este minorant (resp. majorant) şi $\forall a' \in A$ astfel încât $a' \leq x$ (resp. $x \leq a'$) $\forall x \in B$ rezultă $a' \leq a$ (resp. $a \leq a'$),

3°. un element $a \in B$ se numeşte *element minimal* (resp. *maximal*) pentru **B** dacă din $x \leq a$ (resp. $a \leq x$) şi $x \in B$ rezultă $x = a$.

Exemplul 7. 1°. Mulţimea $\mathbb{N}$ dotată cu relaţia binară (de divizibilitate) **R** definită prin $xRy \Leftrightarrow x \mid y$ (*x* divide **y**) este o mulţime ordonată (**exerciţiu !**). Fie **A** = {**2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **10**, **12**} o parte nevidă a lui $\mathbb{N}$. Atunci:

-numărul **1** este minorant pentru **A** pentru că divide orice element din **A**

-numărul **2520** (cel mai mic multiplu comun al elementelor lui **A**) este majorant pentru **A**; orice multiplu comun al elementelor lui **A** este majorant pentru **A**,

-numărul **1** este margine inferioară pentru **A** pentru că nu există alt minorant în $\mathbb{N}$ pentru **A**; deci *inf* **A** = **1**,

-numărul **2520** este margine superioară pentru **A** pentru că nu există alt majorant în $\mathbb{N}$ pentru **A** "mai mic" (relativ la relaţia de divizibilitate) decât **2520** ; deci *sup* **A** = **2520**,

Scanned with OKEN Scanner

-numerele **2, 3, 5, 7** sunt elementele minimale ale lui **A** ,
-numerele **7, 8, 9, 10, 12** sunt elementele maximale ale lui **A** .

2°. Considerăm mulţimea $\mathbb{N}$ dotată cu relaţia de ordine obişnuită şi **A** = {**2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12**} $\subset \mathbb{N}$. Atunci :

- **1** şi **2** sunt minoranţi pentru **A**,
- orice număr natural $\geq$ **12** este majorant pentru **A** ,
- **2** = *inf* **A** = *min* **A** şi **12** = *sup* **A** = *max* **A**,
- **2** este unicul element minimal, iar **12** este unicul element maximal.

Elemente direct comparabile

Definiţia 5. Fie mulţimea ordonată **A**($\leq$). Spunem că elementele **x** şi **y** sunt *direct comparabile* dacă au proprietăţile:

1°. sau **x** $\leq$ **y** sau **y** $\leq$ **x**,

2°. nu există **z** $\in$ **A** astfel încât sau **x** $\leq$ **z** $\leq$ **y** sau **y** $\leq$ **z** $\leq$ **x.**

Exemplul 8. Pentru mulţimea **A** din Exemplul 7.1° numerele **3** şi **6** sunt direct comparabile, dar numerele **3** şi **12** nu sunt direct comparabile (pentru că **3** $\leq$ **6** $\leq$ **12**)

Diagrama Hasse

Orice mulţime ordonată finită **A**($\leq$) se poate reprezenta printr-o *diagramă Hasse*, care este formată din cerculeţe mici (sau puncte) care reprezintă elementele mulţimii **A** şi din segmente de dreaptă care unesc câte două elemente direct comparabile .

Elementele diagramei se structurează pe nivele şi anume :

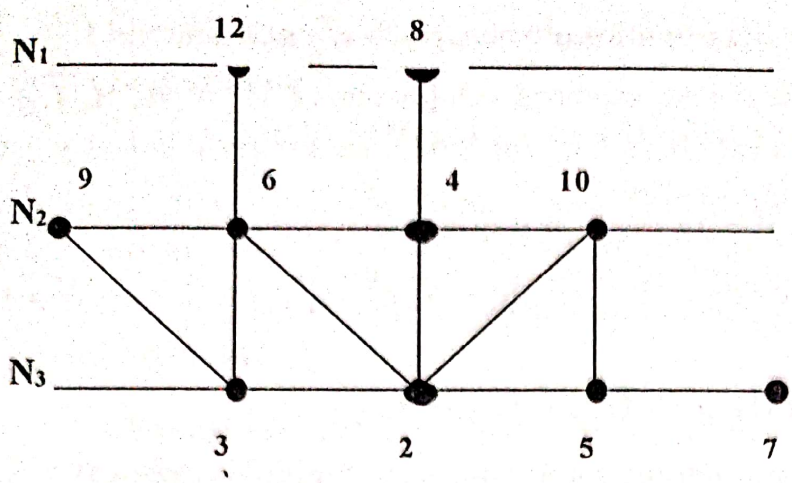
- pe nivelul N_1 se pun elementele minimale,
- pe nivelul N_2 se pun elementele direct comparabile cu elementele minimale,

.....

- pe nivelul N_k se pun acele elemente (nerepartizate pe nivelele inferioare) care sunt direct comparabile cu elementele din N_{k-1}, etc...

Exemplul 9. Diagrama Hasse pentru mulţimea **A** = {**2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12**} dotată cu relaţia de divizibilitate este cea din figura următoare

Scanned with OKEN Scanner



Desenați în boxa de mai sus diagrama Hasse pentru mulțimea **A** dotată cu relația de ordine uzuală.

§3. Funcții

1. Definiții. Exemple

Definiția 6. Se numește *funcție* orice triplet ordonat **(A, B, f)** format din mulțimile **A, B** și *legea de corespondență* (sau *corespondența*) **f** care asociază fiecărui element $x \in A$ un singur element (și numai unul) $y \in B$ numit *imaginea lui* **x** *prin corespondența* **f** și notat cu $f(x)$; **A** se numește *domeniul* funcției, iar **B** se numește *codomeniul* funcției.

Pentru funcția din definiția de mai sus se folosesc de obicei notațiile mai comode

$$f : A \to B \qquad A \xrightarrow{f} B$$

sau - atunci când domeniul și codomeniul sunt cunoscute - se folosește doar simbolul **f**.

Definiția 7. Funcțiile **(A, B, f)** și **(A', B', g)** se numesc *egale* dacă și numai dacă $A = A'$, $B = B'$ și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Exemplul 10.. Se consideră o populație dialelică **P** cu familia de alele $\{a, A\}$; fie $G = \{aa, aA, AA\}$ mulțimea genotipurilor acestei populații. Fiecare individ din **P** are un anumit genotip. Definim funcția **(P, G, f)** prin care se asociază fiecărui individ din **P** genotipul propriu.

Fiecărei funcții $f : A \to B$ i se asociază mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ numită *graficul funcției* **f**.

Scanned with OKEN Scanner

Expresia $y = f(x)$ se numeşte *ecuaţia graficului* funcţiei f.

Fiecărei funcţii i se asociază relaţia binară $R_f = (A, B, G_f)$ a cărei imagine *Im* R_f este notată cu *Im* f; deci *Im* $f = \{y \in B \mid \exists\, x \in A, y=f(x)\}$. Reciproca nu este adevărată, adică nu orice relaţie binară este o funcţie. Mai exact, relaţia binară $R = (A, B, G)$ este funcţie dacă şi numai dacă satisface condiţiile :1°. $D_R = A$, 2°. $(x, y_1) \in G$, $(x, y_2) \in G$ implică $y_1 = y_2$.

2. Moduri de a defini o funcţie

Se disting următoarele două moduri de a defini o funcţie :
a) *sintetic*, b) *analitic*.

a) *Funcţii definite sintetic*

Fie $f : A \to B$ având ca domeniu mulţimea finită $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Spunem că f este definită sintetic dacă se precizează direct imaginea fiecărui element din domeniu. Acest lucru se realizează de obicei prin tabele de tipul următor:

x	a_1	a_2	...	a_n
$f(x)$	b_1	b_1	...	b_n

Astfel de funcţii se evidenţiază în orice experiment în care se determină valorile numerice ale unei caracteristici cantitative.

b) *Funcţii definite analitic*

Sunt funcţii $f : A \to B$ pentru care legea de corespondenţă se defineşte cu ajutorul unei proprietăţi (relaţii) care leagă un element oarecare (generic) din domeniu cu imaginea sa. Concret, aceasta este echivalent cu a da ecuaţia graficului funcţiei. De exemplu, funcţia f cu domeniul $\mathbb{R}$, codomeniul $\mathbb{R}$ şi care reflectă directa proporţionalitate dintre element şi imaginea sa de coeficient (rată) de proporţionalitate ½, este de fapt funcţia :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 14. Definiţi câteva funcţii elementare. Controlaţi-vă pe baza manualelor de liceu!

Exerciţiul 15. Daţi definiţiile pentru: *funcţia identitate, funcţia constantă şi funcţia caracteristică a unei mulţimi.* Controlaţi-vă pe baza manualului [1] pag. 31.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru funcţia **(X, Y, f)** şi părţile nevide $A \subset X$ şi $B \subset Y$ se definesc mulţimile

$$f(A) = \{f(x) \mid \forall x \in A\} \qquad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\};$$

f(A) se numeşte *imaginea mulţimii* **A** *prin* **f**, iar $f^{-1}(B)$ se numeşte *contraimaginea prin* **f** *a mulţimii* **B**. Mulţimea *Im* **f = f(X)** se numeşte *imaginea funcţiei* **f**. Dacă **B = {b}** atunci notăm $f^{-1}(\{b\})$ cu $f^{-1}(b)$; deci $f^{-1}(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\}$, adică $f^{-1}(b)$ este mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei **f(x) = b**.

Exemplul 12. Considerăm funcţia din Exemplul 10. Dacă $P_H \subset P$ este submulţimea homozigoţilor, atunci $f(P_H) = \{aa, AA\}$. În plus, $f^{-1}(aA)$ este submulţimea heterozigoţilor din **P**.

Exerciţiul 16. Pentru funcţia din Exemplul 10 descrieţi submulţimile: $f(P_h)$, $f^{-1}(\{aa\})$, $f^{-1}(\{AA\})$, $f^{-1}(\{aa, AA\})$; aici P_h este submulţimea heterozigoţilor din populaţia **P**.

Exerciţiul 17. Definiţi noţiunile: funcţie *injectivă, surjectivă, bijectivă* ([1] pag. 32). Daţi exemple de fiecare fel. Folosiţi pentru exemplificare şi funcţiile din Exemplele 10 şi 13.

3. Procedee de introducere a funcţiilor în cercetarea din Biologie

În Biologie se folosesc toate funcţiile elementare precum şi unele funcţii speciale (consultaţi eventual [1] §3,4-6). Prezentăm două procedee de introducere a funcţiilor în Biologie:

a) *ajustarea prin funcţii polinomiale*,
b) *construcţia de polinoame de interpolare*.

a) ***Ajustarea prin funcţii polinomiale***

Fie $P_i(t_i, n_i)$, $i = 1, 2, ..., m$ punctele corespunzătoare la **m** determinări dintr-o experienţă. Ne propunem să determinăm o funcţie (dintr-o clasă aleasă) având ecuaţia graficului $y = f(x)$, cu proprietatea că suma pătratelor abaterilor dintre ordonatele n_i ale punctelor $P_i(t_i, n_i)$ şi ordonatele $f(t_i)$ ale punctelor curbei să fie minimă. Acest procedeu de alegere a unei funcţii având ca criteriu minimizarea sumei pătratelor abaterilor este cunoscut sub numele de *metoda celor mai mici pătrate* (şi este datorat lui K. F. Gauss).

Scanned with OKEN Scanner

Ne propunem să determinăm funcția ***liniară*** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t) = at + b$ (adică să determinăm numerele reale **a** și **b**), astfel încât

$$h(a,b) = \sum_{i=1}^{m}(n_i - a\,t_i - b)^2 \quad \text{să fie minimă.}$$

Se demonstrează că dacă utilizăm notațiile:

$$M(t) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} t_i\,,\quad M(n) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i\,,\quad M(t^2) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} t_i^2\,,$$

$$D^2(t) = M(t^2) - [M(t)]^2\,,\quad M(t\cdot n) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} t_i n_i\,,$$

$$S(t, n) = M(t\cdot n) - M(t)M(n)$$

funcția căutată corespunde valorilor

$$a_0 = \frac{S(t,n)}{D^2(t)}, \qquad b_0 = M(n) - a_0\,M(t).$$

Pentru aplicațiile concrete este utilă remarca

$$D^2(t-a) = D^2(t),\quad S(t-a, n-b) = S(t, n),\quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

În particular, dacă $a = M(t)$ atunci

$$M(t-a) = 0,\ S(t, n) = S(t-a, n) = M((t-a)\cdot n))$$

iar coeficienții de ajustare devin

$$a_0 = \frac{S(t-a,n)}{D^2(t-a)}, \qquad b_0 = M(n).$$

Deci funcția liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t) = a_0 t + b_0$ este funcția căutată. Această funcție se numește *funcție liniară de ajustare a datelor* sau *ajustare liniară a datelor*.

Exemplul 13. Producția de azotat de amoniu a unei uzine a fost:

Anii t	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Mii tone x	69,4	70,5	75,0	62,1	71,2	70,4	87,2	103,2	126,3

Vom ajusta liniar aceste date. Luăm **a=1985, b=81,7** (valorile medii ale celor două serii de date) și construim tabelul:

Scanned with OKEN Scanner

t_i-1985	x_i	x_i-81,7	(t_i-1985)(x_i-81,7)	(t_i-1985)^2
-4	69,4	-12,3	49,2	16
-3	70,5	-11,2	33,6	9
-2	75,0	-6,7	13,4	4
-1	62,1	-19,6	19,6	1
0	71,2	-10,5	0,00	0
1	70,4	-11,3	-11,3	1
2	87,2	5,5	11,0	4
3	103,2	21,5	64,5	9
4	126,3	44,6	178,4	16
	735,3	0	Total=358,4	Total=60

Obținem atunci dreapta de ajustare **x=81,7+5,97 t'** unde **t'=t-1985.** Datele obținute pe baza ajustării sunt

Anii	t_i-1985	x_i	Date ajustate $\overline{x}_i$	$x_i - \overline{x}_i$	$(x_i - \overline{x}_i)^2$
1981	-4	69,4	57,82	11,58	134,10
1982	-3	70,5	63,79	6,71	45,02
1983	-2	75,0	69,76	5,24	27,46
1984	-1	62,1	75,73	-13,63	185,78
1985	0	71,2	81,7	-10,5	110,25
1986	1	70,4	87,67	-17,27	298,25
1987	2	87,2	93,64	-6,44	41,47
1988	3	103,2	99,61	3,59	12,89
1989	4	126,3	105,58	20,72	429,32
					Total = =1284,54

Prin urmare, valoarea minimă pentru **h(a, b)** este

$$h(a_0, b_0) \approx h(5,97;\ 81,7) \approx 1284,54.$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest exemplu există două particularităţi a căror exploatare este importantă pentru practică: momentele de timp sunt echidistante şi în număr impar, iar media valorilor x_i se determină exact, fără rotunjiri. Când astfel de avantaje nu există se pot folosi direct formulele de calcul, dacă numerele cu care se lucrează nu sunt prea mari. Dacă datele problemei sunt numere mari se foloseşte metoda zeroului fals în care x_0 se alege valoare întreagă sau o valoare ce creează comodităţi pentru calcule. Prezentăm un astfel de exemplu în cele ce urmează.

Exemplul 14. În 1923, E. Dudich a măsurat lungimea totală y şi lungimea x a mandibulei pentru coleopterul *Cyclommatus tarandus* şi a obţinut datele următoare :

lungimea totală y	20,4	33,1	38,4	47,3	54,2	66,1	74,0
lungimea mandibulei x	3,9	10,7	14,1	19,9	24,0	30,7	34,5

Pe baza acestor date vom obţine funcţia de ajustare liniară $f(x)=a_0x+b_0$. Construim tabelul următor:

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
3,9	20,4	79,56	15,21
10,7	33,1	354,17	114,49
14,1	38,4	541,44	198,81
19,9	47,3	941,27	396,01
24,0	54,2	1300,8	576,00
30,7	66,1	2029,27	942,49
34,5	74,0	2553,00	1190,25
Σx_i=137,8	Σy_i=333,5	Σx_iy_i=7799,51	3433,26
M(x)=19,68571	M(y)=47,64286	M(xy)=1114,216	$M(x^2)$=490,4657

Folosind formulele (1) rezultă

$$f(x)=1,712987x+13,92149.$$

După rotunjiri la două zecimale obţinem

$$f(x)=1,71x+13,92.$$

Pentru a stabili cât de bună este această ajustare considerăm tabelul

y_i	$\bar{y}_i=1,71x_i+13,92$	$y_i-\bar{y}_i$	$(y_i-\bar{y}_i)^2$
20,4	20,589	-0,189	0,035721
33,1	32,217	0,883	0,779689
38,4	38,031	0,369	0,136161
47,3	47,949	-0,649	0,421201

Scanned with OKEN Scanner

54,2	54,96	-0,760	0,577600
66,1	66,417	-0,317	0,100489
74,0	72,915	1,085	1,177225
			$h(a_0,b_0)$= 3,228086

Deci **min h(a, b) = $h(a_0, b_0) \cong 3{,}228086$.**

Dacă se lucra cu o singură zecimală se obţinea ajustarea găsită de J.Huxley care a stabilit că:

$$y = 1{,}7\,x + 13{,}7.$$

Exerciţiul 18. Se doreşte să se estimeze greutatea **G** a cochiliei goale a unei moluşte în funcţie de lungimea **L** a sa printr-o relaţie de forma **G=aL + b**. Se determină în acest scop greutăţile şi lungimile corespunzătoare la 20 de indivizi. Datele sunt înregistrate în tabelul următor.

Nr. crt.	G	L	Nr. crt.	G	L
1	2,47	7,6	11	2,17	5,5
2	2,79	12,2	12	2,96	9,6
3	2,65	5,2	13	3,06	1147
4	3,09	9,4	14	2,82	8,0
5	3,15	14,7	15	2,28	4,1
6	2,71	6,5	16	2,91	5,3
7	3,16	10,70	17	2,46	5,3
8	2,45	3,9	18	2,65	7,97
9	2,99	13,9	19	2,91	6,99
10	2,60	8,7	20	2,80	10,2

Arătaţi că **G=7,95404L-13,5474** este ajustarea căutată. Dacă se găseşte o moluşcă de lungime **2,55** atunci ne aşteptăm ca greutatea ei să fie **6,735377 (Verificaţi!).**

Astfel de estimări se pot evident face ori de câte ori avem serii de date pentru două caracteristici. Se pune problema să ne asigurăm că o astfel de estimare are legătură cu realitatea; în cazul de mai sus ne interesează dacă greutatea calculată **6,735377** este sau nu apropiată de

Scanned with OKEN Scanner

greutatea reală. Trebuie testat, pe baza statisticii inferențiale, faptul că cele două caractere acceptă sau nu o relație liniară.

În locul funcțiilor de ajustare liniară se pot folosi *funcții de ajustare polinomiale*, adică funcții de forma

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0,$$

care minimizează expresia:

$$h(a_0,a_1,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{m}(n_i-a_nt_i^n-a_{n-1}t_i^{n-1}-\ldots-a_1t-a_0)^2.$$

Astfel de ajustări se numesc generic *ajustări parabolice*. Coeficienții funcției căutate se constituie în unica soluția a sistemului

$$\begin{cases} ma_0+a_1\sum_{i=1}^{m}t_i+a_2\sum_{i=1}^{m}t_i^2+\ldots+a_n\sum_{i=1}^{m}t_i^n=\sum_{i=1}^{m}n_i \\ a_0\sum_{i=1}^{m}t_i+a_1\sum_{i=1}^{m}t_i^2+a_2\sum_{i=1}^{m}t_i^3+\ldots+a_n\sum_{i=1}^{m}t_i^{n+1}=\sum_{i=1}^{m}t_in_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum_{i=1}^{m}t_i^n+a_1\sum_{i=1}^{m}t_i^{n+1}+a_2\sum_{i=1}^{m}t_i^{n+2}+\ldots+a_n\sum_{i=1}^{m}t_i^{2n}=\sum_{i=1}^{m}t_i^nn_i \end{cases}$$

În particular, ajustarea parabolică de gradul doi se face printr-o funcție de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=a_2t^2+a_1t+a_0$ pentru care coeficienții formează soluția unică a sistemului:

$$\begin{cases} ma_0+a_1\sum_{i=1}^{m}t_i+a_2\sum_{i=1}^{m}t_i^2=\sum_{i=1}^{m}n_i \\ a_0\sum_{i=1}^{m}t_i+a_1\sum_{i=1}^{m}t_i^2+a_2\sum_{i=1}^{m}t_i^3=\sum_{i=1}^{m}t_in_i \\ a_0\sum_{i=1}^{m}t_i^2+a_1\sum_{i=1}^{m}t_i^3+a_2\sum_{i=1}^{m}t_i^4=\sum_{i=1}^{m}t_i^2n_i \end{cases}.$$

Exemplul 15. Vom ajusta parabolic datele din Exemplul 13.

Alegând din nou **a=1985** rezultă $\sum_{i=1}^{9}(t_i-1985)=\sum_{i=1}^{9}(t_i-1985)^3=0$,

adică $M(t)=M_3(t)=0$; vom alege **b=81,7.** Se obține tabelul

Scanned with OKEN Scanner

$t_i' = t_i$- 1985	x_i	$x_i' = = x_i$- 81,7	$t_i' x_i'$	$(t_i')^2$	$(t_i')^4$	$(t_i')^2 \cdot x_i'$
-4	69,4	-12,3	49,2	16	256	-196,8
-3	70,5	-11,2	33,6	9	81	-100,8
-2	75,0	-6,7	13,4	4	16	-26,8
-1	62,1	-19,6	19,6	1	1	-19,6
0	71,2	-10,5	0,00	0	0	0,00
1	70,4	-11,3	-11,3	1	1	-11,3
2	87,2	5,5	11,0	4	16	22,0
3	103,2	21,5	64,5	9	81	193,5
4	126,3	44,6	178,4	16	256	713,6
	Total= =735,3		Total= =358,4	Total= =60	Total= =708	Total= =573,8

Se obține sistemul

$$\begin{cases} 9a_0 + 60a_2 = 735,3 \\ 60a_1 = 358,4 \\ 60a_0 + 708a_2 = 5475,8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 69,28 \\ a_1 = 5,97 \\ a_2 = 1,86 \end{cases}$$

Coeficienţii determinaţi mai sus ne conduc la funcţia de ajustare $x=1,86t'^2 + 5,97\ t' + 69,28$ unde $t'=t-1985$. Valorile ajustate $\bar{x}_i$ sunt

Anii	x_i	Date ajustate $\bar{x}_i$	$x_i - \bar{x}_i$	$(x_i - \bar{x}_i)^2$
1981	69,4	75,16	-5,76	33,18
1982	70,5	68,11	2,39	5,71
1983	75,0	64,78	10,22	104,45
1984	62,1	65,17	3,07	9,42
1985	71,2	69,28	1,92	3,69
1986	70,4	77,11	-6,71	45,02
1987	87,2	88,66	-1,46	2,13

Scanned with OKEN Scanner

1988	103,2	103,93	-0,73	0,54
1989	126,3	122,92	3,38	11,42
				Total =215,56

Valoarea minimă a funcţiei $h(a_0, a_1, a_2)$ este $\approx h(69,28; 5,97; 1,86) \approx$ **215,56** şi este mai mică decât valoarea minimă **1284,54** corespunzătoare ajustării liniare.

Prin urmare este firesc să fie preferată ajustarea parabolică.

În cazul ajustării parabolice avantajele enumerate la sfârşitul Exemplului 12 sunt şi mai mari pentru că atât $\sum_{i=1}^{9} t_i = 0$ cât şi $\sum_{i=1}^{9} t_i^3 = 0$.

Pentru comparaţie reluăm exemplul lui Dudich.

Exemplul 16. Vom ajusta parabolic datele din Exemplul 13. Se obţine tabelul

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2y_i$
3,9	20,4	79,56	15,21	59,319	231,3441	310,284
10,7	33,1	354,17	114,49	1225,043	13107,96	3789,619
14,1	38,4	541,44	198,81	2803,221	39525,42	7634,304
19,9	47,3	941,27	396,01	7880,599	156823,9	18731,27
24,0	54,2	1300,8	576,00	13824,00	331776,0	31219,2
30,7	66,1	2029,27	942,49	28,934,44	888287,4	62298,59
34,5	74,0	2553,00	1190,25	41063,63	1416695,0	88078,5
Σx_i= =137,8	Σy_i= =333,5	Σx_iy_i= =7799,51	3433,26	Σx_i^3= =95790,25	Σx_i^4= =2846447	$\Sigma x_i^2y_i$= =212061,8
M(x)= 19,68571	M(y)= 47,64286	M(xy)= 1114,216	$M(x^2)$= =490,4657	$M(x^3)$= =13684,3214	$M(x^4)$= =406635,2857	$M(x^2y)$= =30294,5428

Coeficienţii căutaţi sunt componentele soluţiei sistemului:

$$\begin{cases} 7a_0 + 137,8a_1 + 3433,26a_2 = 333,5 \\ 137,8a_0 + 3433,26a_1 + 95790,25a_2 = 7799,51 \\ 3433,26a_0 + 95790,25a_1 + 2846447,103a_2 = 212061,769 \end{cases}.$$

Se obţine funcţia de ajustare $f(x) = 0,0304x^2 + 1,5939x + 14,7733$. Valorile ajustate $\bar{y}_i = 0,0304x_i^2 + 1,5939x_i + 14,7733$ şi abaterile de la valorile măsurate sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Scanned with OKEN Scanner

y_i	$\bar{y}_i$	$y_i - \bar{y}_i$	$(y_i - \bar{y}_i)^2$
20,4	21,0359	-0,6359	0,4044
33,1	32,1767	0,9233	0,8525
38,4	37,8525	0,5475	0,2998
47,3	47,6971	-0,3971	0,1577
54,2	54,7797	-0,5797	0,3361
66,1	66,5738	-0,4738	0,2245
74,0	73,3843	0,6157	0,3791
			2,6540

Valoarea minimă a funcției $\mathbf{h(a_0, a_1, a_2)}$ este $\approx$**h(14,7733; 1,5939; 0,00304)** $\approx$**2,6540** și este mai mică decât valoarea minimă **3,2281** corespunzătoare ajustării liniare. Prin urmare este firesc să preferăm ajustarea parabolică.

Exercițiul 19. Efectuați atât ajustarea liniară cât și cea parabolică pentru funcția din Exemplul 13 utilizând "centrările" în $x_0 = 20$ și $y_0 = 47$, adică făcând mai întâi calculele pentru valorile $x_i' = x_i - 20$ și $y_i' = y_i - 47$. Țineți cont că aceste centrări modifică coordonatele punctelor dar nu modifică abaterile.

b) ***Construcția de polinoame de interpolare.***

Problemă: să se determine un polinom cu proprietatea că graficul său trece prin **m+1** puncte $P_i(t_i, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$. Se demonstrează că există un **singur** polinom de gradul **m** cu această proprietate. Polinomul

$$L(t_0, t_1, \ldots, t_m; t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(t - t_0)(t - t_1)\ldots(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})\ldots(t - t_m)}{(t_i - t_0)(t_i - t_1)\ldots(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})\ldots(t_i - t_m)} \cdot x_i .$$

este soluție a acestei probleme; el este cunoscut sub numele de *polinomul de interpolare Lagrange* .

Exemplul 17 . Să determinăm polinomul de grad minim al cărui grafic trece prin punctele $P_0(0,1)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,-1)$, $P_3(4,1)$ precum și valoarea lui în $x = 3$. Polinomul Lagrange corespunzător este

Scanned with OKEN Scanner

$$L(0,1,2,4;\ t)=\frac{(t-1)(t-2)(t-4)}{-1(-2)(-4)}\cdot 1+\frac{(t-0)(t-2)(t-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}\cdot 1+$$

$$+\frac{(t-0)(t-1)(t-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}\cdot(-1)+\frac{(t-0)(t-1)(t-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}\cdot 1=$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot(t-1)(t-2)(t-4)+\frac{1}{3}\cdot t(t-2)(t-4)+\frac{1}{4}t(t-1)(t-4)+$$

$$+\frac{1}{24}t(t-1)(t-2)=\frac{1}{2}t^3-\frac{5}{2}t^2+2t+1.$$

Evident, putem acum calcula **L(0, 1, 2, 4; 3)= -2.** Se putea calcula valoarea în **t=3** şi direct (adică fără să determinăm polinomul de interpolare) şi anume:

$$L(0,1,2,4;\ 3)=\frac{(3-1)(3-2)(3-4)}{-1(-2)(-4)}\cdot 1+\frac{(3-0)(3-2)(3-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}\cdot 1+\frac{(3-0)(3-1)(3-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}\cdot(-1)+$$

$$+\frac{(3-0)(3-1)(3-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}\cdot 1=-2$$

Exercițiul 19. Datele din Exemplul 13 conduc la considerarea punctelor P_0**(3,9; 20,4),** P_1**(10,7; 33,1),** P_2**(14,1; 38,4),** P_3**(19,9; 47,3),** P_4**(24, 54,2),** P_5**(30,7; 66,1),** P_6**(34,5; 74).** Determinați polinomul de interpolare Lagrange corespunzător acestor date şi apoi calculați valoarea acestuia în **x=15,3** şi în **x=29,9.**

Calculați apoi aceleaşi valori direct.

În cazul în care momentele $t_0, t_1,...,t_m$ sunt echidistante polinomul de interpolare capătă forma mai simplă (cunoscută şi sub numele de *polinomul de interpolare al lui Newton*)

$$P_m(t_0+\theta h)=x_0+\frac{\Delta x_0}{1!}\theta+...+\frac{\Delta^k x_0}{k!}\theta(\theta-1)...(\theta-k+1)+$$

$$+...+\frac{\Delta^m x_0}{m!}\theta(\theta-1)...(\theta-m+1)$$

unde: $h=t_i-t_{i-1}$, $\theta=\dfrac{t-t_0}{h}$ şi $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta^{k+1}x_i=\Delta^k x_{i+1}-\Delta^k x_i$.

Cantitățile $\Delta^k x_i$, $k=1,2,...$ se numesc *diferențe finite progresive*; se pot defini şi diferențe finite regresive şi diferențe centrale şi câte un polinom de interpolare Newton corespunzător.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 18. Să determinăm polinomul de grad minim al cărui grafic trece prin punctele punctele $P_0(0,1)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,-1)$, $P_3(3,1)$. Vom determina mai întâi diferenţele finite progresive care apar. Calculul lor se organizează sub forma tabelului următor:

x_i	Δx_i	$\Delta^2 x_i$	$\Delta^3 x_i$
1	0	-2	6
1	-2	4	
-1	2		
1			

Ţinând cont că $h = 1$, $t_0 = 0$, $\theta = t$, polinomul de interpolare Newton este

$P(t) = 1 - t(t-1) + t(t-1)(t-2)$ sau $P(t) = t^3 - 4t^2 + 3t + 1$.

Rezolvaţi această problemă şi folosind formula lui Lagrange!

Exerciţiul 20. Să se determine polinomul de grad minim al cărui grafic trece prin punctele $P_0(-2, 3)$, $P_1(-1, 5)$, $P_2(0, -1)$, $P_3(1, 2)$, $P_4(2, -1)$. Folosiţi ambele formule de interpolare. Comparaţi volumele de muncă necesare. Calculaţi apoi valorile polinomului în $t = 1{,}27$ cu două şi respectiv cu patru zecimale. Comentaţi rezultatele!

§4. Frecvenţe

Fie $f : \Omega \to \Omega'$ o funcţie surjectivă pentru care $|\Omega| = n$ şi $|\Omega'| = m$ (cu $m \le n$). Dacă $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ şi $x_i = i = 1, 2, \dots, m$ sunt valorile distincte ale funcţiei f atunci mulţimile $A_i = f^{-1}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ sunt nevide şi oricare două dintre ele sunt disjuncte.

Definiţia 8. Numerele $n_i = |A_i|$ şi $f_i = \dfrac{|A_i|}{|\Omega|}$ se numesc *frecvenţa absolută* şi respectiv *frecvenţa relativă* a valorii x_i ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$). Numărul $100 \cdot f_r(x)$ este procentul (%) de elemente din domeniu în care funcţia ia valoarea x.

Evident, au loc egalităţile:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = n, \qquad f_1 + f_2 + \dots + f_m = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

Se asociază funcției **f** tabelul

x_1	x_2	...	x_m
$\lvert f^{-1}(x_1)\rvert$	$\lvert f^{-1}(x_2)\rvert$	...	$\lvert f^{-1}(x_m)\rvert$

care definește o nouă funcție $\tilde{f}:\Omega'\to\mathbb{R}$. Funcția $\tilde{f}$ se va numi și *repartiția frecvențelor absolute ale valorilor funcției* **f**. De asemenea îi putem asocia funcția $\bar{f}:\Omega'\to\mathbb{R}$ care asociază fiecărei valori $x_i\in\Omega'$ numărul f_i (adică frecvența relativă a valorii x_i). Funcția $\bar{f}$ se va numi și *repartiția frecvențelor relative ale valorilor funcției* **f.**

Repartiției frecvențelor absolute ale funcției **f** i se asociază o reprezentare grafică, numită *diagrama în batoane* sau *histograma,* obținută astfel: se înregistrează pe axa absciselor valorile $x_1, x_2, \dots, x_m$ și din aceste puncte se ridică segmente verticale de lungimi proporționale (sau egale – dacă numerele nu sunt prea mari) cu frecvențele absolute; unind extremitățile acestor segmente se obține poligonul frecvențelor absolute.

Putem asocia funcției **f** cu domeniul de definiție finit funcțiile $g_s, g_d, \overline{g_s}, \overline{g_d}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin:

- $g_s(x)$ este suma tuturor frecvențelor absolute corespunzătoare valorilor $\le x$ și se numește *frecvența absolută cumulată crescătoare a valorii* **x**
- $\overline{g_s}(x)$ este suma tuturor frecvențelor relative corespunzătoare valorilor $\le x$ și se numește *frecvența relativă cumulată crescătoare a valorii* **x**
- $g_d(x)$ este suma tuturor frecvențelor absolute corespunzătoare valorilor $\ge x$ și se numește *frecvența absolută cumulată descrescătoare a valorii* **x**
- $\overline{g_d}(x)$ este suma tuturor frecvențelor relative corespunzătoare valorilor $\ge x$ și se numește *frecvența relativă cumulată descrescătoare a valorii* **x**.

Exercițiul 21. Arătați că

$$g_s(x)=\left|f^{-1}((-\infty,x))\right|=\left|\{\omega\in\Omega\mid f(\omega)<x\}\right|,\quad \overline{g_s}=\frac{1}{|\Omega|}g_s$$

Scanned with OKEN Scanner

$$g_d(x) = \left| f^{-1}([x,+\infty)) \right| = \left| \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq x\} \right|, \quad \overline{g_d} = \frac{1}{|\Omega|} g_d .$$

Funcţia $\overline{g_s}$ se numeşte *funcţia de repartiţie* a funcţiei **f** şi se notează în mod obişnuit cu **F**.

Exerciţiul 22. Definiţi *diagrama în batoane* sau *histograma* pentru frecvenţele absolute şi relative, simple şi cumulate. Definiţi apoi poligoanele frecvenţelor corespunzătoare.

Exemplul 18. Numărul x_i de purcei la o fătare la rasa Marele Alb la o fermă este dat în tabelul următor

x_i	5	6	7	8	9	10
n_i	7	10	15	25	25	18

în care n_i este numărul de scroafe care au avut x_i purcei la o fătare. Se consideră funcţia reală **f** definită pe mulţimea tuturor scroafelor şi care asociază fiecărei scroafe numărul de purcei pe care i-a fătat. Sunt uşor de identificat funcţiile $\tilde{f}, \bar{f}, g_s, \overline{g}_s, g_d, \overline{g}_d$. Frecvenţele absolute şi relative simple şi cumulate sunt prezentate în tabelul următor:

x_i	n_i	f_i	g_s	$\overline{g}_s$	g_d	$\overline{g}_d$
5	7	0,07	7	0,07	100	1,00
6	10	0,10	17	0,17	93	0,93
7	15	0,15	32	0,32	83	0,83
8	25	0,25	57	0,57	68	0,68
9	25	0,25	82	0,82	43	0,43
10	18	0,18	100	1,00	18	0,18

Exerciţiul 23. Dintr-o plantaţie de flori de mac s-au ales **40** de flori la care s-a determinat numărul stigmatelor. Datele obţinute sunt înregistrate în tabelul următor:

Numărul stigmatelor x_i	7	8	9	10	11
Frecvenţele absolute n_i	6	18	8	6	2

Identificaţi funcţiile **f**, $\tilde{f}, \bar{f}, g_s, \overline{g}_s, g_d, \overline{g}_d$ şi determinaţi frecvenţele absolute şi relative simple şi cumulate. Desenaţi apoi histogramele corespunzătoare.

Exemplul 19. Pentru a aprecia starea generală a animalelor pe care le are un mic fermier a cântărit fiecare din cele **40** oi pe care le are şi a obţinut datele din Tabelul 1. Acest tabel se poate interpreta ca fiind

Scanned with OKEN Scanner

o funcție **f** definită sintetic cu domeniul de definiție mulțimea celor **40** de oi (identificată pentru comoditatea prezentării cu mulțimea **{1, 2, ... , 40}**), codomeniul mulțimea numerelor reale și legea de corespondență cea care asociază fiecărei oi masa sa.

Tabelul 1

Nr. crt.	Masă	Nr.crt.	Masă	Nr. crt.	Masă	Nr. crt.	Masă
1.	37	11.	39	21.	40	31.	36
2.	36	12.	41	22.	39	32.	38
3.	37	13.	41	23.	38	33.	38
4.	31	14.	39	24.	37	34.	32
5.	35	15.	35	25.	35	35.	37
6.	33	16.	37	26.	33	36.	35
7.	32	17.	32	27.	31	37.	34
8.	34	18.	34	28.	36	38.	33
9.	33	19.	36	29.	40	39.	35
10.	40	20.	38	30.	39	40.	39

Frecvențele absolute și cele relative ale valorilor acestei funcții sunt date în Tabelul 2.

Tabelul 2

Masă x_i	Frecvența absolută n_i	Frecvențe relative f_i
31	2	0,050
32	3	0,075
33	4	0,100
34	3	0,075
35	5	0,125
36	4	0,100
37	5	0,125
38	4	0,100
39	5	0,125
40	3	0,075
41	2	0,050
Total	40	1,00

În construcția Tabelului 2 s-a ținut cont că $f_{min} = 31$ și $f_{max} = 41$. Din Tabelul 2 se constată că **5** oi au greutatea **37** Kg., adică frecvența absolută a valorii **37** este **5**; frecvența relativă a valorii **37** este **5/40 = 0,125**. Determinarea funcțiilor asociate g_s, g_d, $\overline{g}_s$, $\overline{g}_d$ (și, în particular, a funcției de repartiție **F**) funcției **f** este realizată în Tabelul 3 .

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 3

Masă x_i	Frecvența absolută n_i	Frecvența relativă f_i	$g_s(x_i)$	$F(x_i) = \tilde{g}_s(x_i)$	$g_d(x_i)$	$\tilde{g}_d(x_i)$
31	2	0,050	2	0,050	40	1,000
32	3	0,075	5	0,125	38	0,950
33	4	0,100	9	0,225	35	0,875
34	3	0,075	12	0,300	31	0,775
35	5	0,125	17	0,425	28	0,700
36	4	0,100	21	0,525	23	0,575
37	5	0,125	26	0,650	19	0,475
38	4	0,100	30	0,750	14	0,350
39	5	0,125	35	0,875	10	0,250
40	3	0,075	38	0,950	5	0,125
41	2	0,050	40	1,000	2	0,050

Din Tabelul 3 se vede, de exemplu, că

- există **21** oi cu greutatea de cel mult **36 kg**,
- există **23** oi cu greutatea de cel puțin **36 kg**.

Pe baza legăturii dintre frecvențele relative şi procente se vede că **12,5%** dintre oi au cel mult **37 kg** şi că **70%** oi au cel puțin **35 kg**.

§5. Caracteristici numerice ale mulțimii valorilor unei funcții reale

Pentru orice funcție reală cu domeniul finit se pun următoarele probleme:

a) *există sau nu un număr real în jurul căruia să se grupeze majoritatea valorilor funcției,*

b) *cât de împrăştiate sunt valorile funcției pe axa reală.*

Corespunzător acestor probleme distingem două tipuri de caracteristici:

a) caracteristici numerice de poziție

b) caracteristici numerice de împrăştiere.

a) Caracteristici numerice de poziție

Printre caracteristicile numerice de poziție distingem: *media, mediana, valoarea modală, momentele simple şi centrate.*

Scanned with OKEN Scanner

1°. Media valorilor unei funcții

Media valorilor unei funcții reale cu domeniul finit este media aritmetică a tuturor valorilor ei. Dacă $f: \Omega \to \mathbb{R}$ cu $|\Omega| = n$ are $m<n$ valori distincte $x_1, x_2, ..., x_m$ cu frecvențele relative $f_1, f_2, ..., f_m$ media sa, notată cu M(f), se calculează cu ajutorul formulei $M(f) = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i$.

Exemplul 20. Pe baza datelor din Exemplul 19 media M(f) este egală, conform formulei (2) și utilizând datele din Tabelul 1, cu:

$$M(f) = 31 \cdot 0{,}050 + 32 \cdot 0{,}075 + 33 \cdot 0{,}100 + 34 \cdot 0{,}075 + 35 \cdot 0{,}125 + +36 \cdot 0{,}100 + + 37 \cdot 0{,}125 + 38 \cdot 0{,}100 + 39 \cdot 0{,}125 + 40 \cdot 0.075 + 41 \cdot 0{,}050 = 36{,}125$$

Exercițiul 24. Calculați media funcției din Exercițiul 11.

Exemplul 21. Pe baza datelor din Exemplul 18 construim tabelul următor

x_i	n_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
5	7	0,07	0,35
6	10	0,10	0,60
7	15	0,15	1,05
8	25	0,25	2,00
9	25	0,25	2,25
10	18	0,18	1,80

Adunând numerele din ultima coloană găsim că numărul mediu de purcei la o fătare este

$$M(f)=5\cdot0{,}07+6\cdot0{,}10+7\cdot0{,}15+8\cdot0{,}25+9\cdot0{,}25+10\cdot0{,}18=8{,}05.$$

Evident, pentru că funcția are puține valori, se putea calcula valoarea medie pe baza definiției, adică

$$M(f) = \frac{1}{100}(5 \cdot 7 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 15 + 8 \cdot 25 + 9 \cdot 25 + 10 \cdot 18) = 8{,}05 .$$

În cazul în care majoritatea frecvențelor absolute sunt egale cu 1 calculul mediei se face pe baza definiției; în acest caz frecvențele relative își pierd din importanță.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietăţile mediei

1 $M(a)=a$, pentru orice funcţie constantă a

1. $\min\limits_{\omega\in\Omega} f(\omega) \le M(f) \le \max\limits_{\omega\in\Omega} f(\omega)$

2. $M(af)=aM(f)$, $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall f: \Omega\to\mathbb{R}$

3. $M(f+g)=M(f)+M(g)$, $\forall f, g: \Omega\to\mathbb{R}$

4. $|M(f\cdot g)|\le\sqrt{M(f^2)}\cdot\sqrt{M(g^2)}$, $\forall f, g: \Omega\to\mathbb{R}$.

6. $M(a_1f_1+a_2f_2+\ldots+a_kf_k)=a_1M(f_1)+a_2M(f_2)+\ldots+a_kM(f_k)$

$\forall a_1, a_2, \ldots, a_k\in\mathbb{R}$ şi $\forall f_1, f_2, \ldots, f_k: \Omega\to\mathbb{R}$.

Calculul mediei. Metoda zeroului fals

- *se alege o valoare* $x_0\in\mathbb{R}$ *cât mai aproape de valoarea medie* (în cazurile concrete, se cunoaşte de obicei o zonă în care se află va-loarea medie reală)

- *se construieşte funcţia* $\theta_{x_0}(f)=f-x_0$ (care ia valori grupate în jurul lui **0**)

- *se ţine cont de egalitatea evidentă* $M(\theta_{x_0}(f))=M(f)-x_0$. □

Exemplul 22. Vom determina folosind metoda zeroului fals media numărului de purcei la o fătare din Exemplul 1. Alegem $x_0=7$ şi construim tabelul următor

x_i	n_i	f_i	x_i-x_0	$f_i(x_i-x_0)$
5	7	0,07	-2	-0,14
6	10	0,10	-1	-0,10
7	15	0,15	0	0,00
8	25	0,25	1	0,25
9	25	0,25	2	0,50
10	18	0,18	3	0,54
	Total =100	Total=1,00		$M(\theta_7(f))=1,05$

Adunând elementele ultimei coloane rezultă că $M(\theta_7(f))=1,05$, deci $M(f) = 7+1,05 = 8,05$; s-a regăsit rezultatul obţinut utilizând fie definiţia fie formula de calcul.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $\theta_{x_0}(f)$ se numește *abaterea funcției* **f** *de la valoarea* x_0. Dacă $x_0 = M(f)$ notăm $\theta(f)$ în loc de $\theta_{x_0}(f)$ și o numim *abaterea de la medie a funcției* **f**.

Exercițiul 25. Verificați că $M(\theta(f)) = 0$.

2°. Mediana

Se numește ***mediana*** funcției $f : \Omega \to \mathbb{R}$ numărul real $\mu = m_f$ care satisface simultan proprietățile

$$\frac{1}{n} \cdot \left|\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \le \mu\}\right| \ge \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad \frac{1}{n} \cdot \left|\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \ge \mu\}\right| \ge \frac{1}{2}.$$

Deci mediana μ are proprietatea că valorile funcției $\le \mu$ sunt aproape la fel de frecvente ca valorile funcției $\ge \mu$.

Exemplul 23. Dacă $|\Omega| = 7$ și **f** are valorile **1, 2, 2, 4, 4, 5, 6** atunci $\mu_f = 4$; într-adevăr, există 5 numere ≤ 4 (adică primul raport este $\frac{5}{7} \ge \frac{1}{2}$) și 4 numere ≥ 4 (adică al doilea raport este $\frac{4}{7} \ge \frac{1}{2}$). Se verifică ușor că alte valori numerice nu satisfac condițiile din definiția medianei. În cazul $|\Omega| = 8$ și **f** are valorile **1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5** atunci $\mu_f = 3$ iar dacă $|\Omega| = 8$ și **f** are valorile **1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 6** atunci μ_f este orice număr cuprins între **3** și **4.**

Pe baza tabelului de la pag. 25 rezultă că mediană a funcției este orice număr între **7** și **8**. Folosind interpolarea liniară rezultă că

$$\mu = 7 + \frac{0{,}57 - 0{,}32}{0{,}50 - 0{,}32} = 7{,}72\,.$$

Mediana este un estimator robust al valorii centrale pentru că, spre deosebire de medie, este puțin sensibil la valorile extreme mari.

3°. Valoarea modală

Valoarea modală (sau, pe scurt, *modulul* sau *moda*) a funcției $f: \Omega \to \mathbb{R}$ este acea valoare care are frecvența maximă. De exemplu, pentru funcțiile din Exemplul precedent, valorile modale sunt **2** și **4** pentru prima funcție, **2, 3** și **5** pentru a doua funcție și respectiv **4** pentru a treia funcție. Deci primele funcții sunt plurimodale, iar ultima este unimodală. Pentru funcția **f** din Exemplul 19 valorile **35, 37** și **39**

Scanned with OKEN Scanner

sunt modale pentru că apar cu frecvenţa maximă 5; deci funcţia este plurimodală.

4°. Momente

Fie funcţia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ unde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ şi k este un număr natural (nenul) fixat. Se numeşte *moment de ordinul* k al funcţiei f numărul notat cu $M_k(f)$ definit prin:

$$M_k(f) = M(f^k).$$

În particular $M_0(f)=1$, şi $M_1(f) = M(f)$. Calculul momentelor de ordinul k se face utilizând abaterile valorilor funcţiei faţă de valoarea x_0 folosită şi în calculul valorii medii şi utilizând formula:

$$M_k(f) = \sum_{i=o}^{k} C_k^i M_{k-i}(\theta_{x_o}(f))\, x_o^i .$$

În cazul în care $x_0 = M(f)$, notăm $m_k = M_k(\theta(f))$ şi îl numim *momentul centrat de ordinul* k. Din formula precedentă rezultă

$$M_k(f) = \sum_{i=o}^{k} C_k^i m_{k-i} [M(f)]^i \quad \text{şi} \quad m_k = \sum_{i=o}^{k} (-1)^k C_k^i M_{k-i}(f)\{M(f)\}^i .$$

Exerciţiul 26. Pe baza formulelor precedente stabiliţi formulele

$$M_2(f) = m_2 + [M(f)]^2, \quad m_2 = M_2(f) - [M(f)]^2 .$$

În acelaşi fel deduceţi că formulele de calcul pentru $M_3(f)$, $M_4(f)$, m_3 şi m_4 sunt următoarele:

$$M_3(f) = M_3(\theta_{x_0}(f)) + 3M_2(\theta_{x_0}(f)) \cdot x_0 + 3M(\theta_{x_0}(f)) \cdot x_0^2 + x_0^3$$

$$M_4(f) = M_4(\theta_{x_0}(f)) + 4M_3(\theta_{x_0}(f)) \cdot x_0 + 6M_2(\theta_{x_0}(f)) \cdot x_0^2 + 4M(\theta_{x_0}(f)) \cdot x_0^3 + x_0^4$$

$$m_3 = M_3(f) - 3M_2(f) \cdot M(f) + 2[M(f)]^3$$

$$m_4 = M_4(f) - 4M_3(f) \cdot M(f) + 6M_2(f)[M(f)]^2 - 3[M(f)]^4$$

Exemplul 24. Să determinăm acum momentele de ordinul 2, 3 şi 4 ale funcţiei f din Exemplul 19. Se construieşte tabelul următor în care se foloseşte notaţia $y_i = x_i - x_o$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5

x_i	y_i	y_i^2	y_i^3	y_i^4	f_i	$y_i \cdot f_i$	$y_i^2 \cdot f_i$	$y_i^3 \cdot f_i$	$y_i^4 \cdot f_i$
31	-4	16	-64	256	0,050	-0,200	0,800	-3,200	12,800
32	-3	9	-27	81	0,075	-0,225	0,675	-2,025	6,075
33	-2	4	-8	16	0,100	-0,200	0,400	-0,800	1,600
34	-1	1	-1	1	0,075	-0,075	0,075	-0,075	0,075
35	0	0	0	0	0,125	0,000	0,000	0,000	0,000
36	1	1	1	1	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
37	2	4	8	16	0,125	0,250	0,500	1,000	2,000
38	3	9	27	81	0,100	0,300	0,900	2,700	8,100
39	4	16	64	256	0,125	0,500	2,000	8,000	32,000
40	5	25	125	625	0,075	0,375	1,875	9,375	46,875
41	6	36	216	1296	0,050	0,300	1,800	10,800	64,800
						$M(\theta_{35}(f))=$ $=1,125$	$M_2(\theta_{35}(f))=$ $=9,125$	$M_3(\theta_{35}(f))=$ $=25,875$	$M_4(\theta_{35}(f))=$ $=174,425$

Se vor folosi formulele din Exercițiul 26 şi rezultatele din Tabelul 5. Rezultă că pentru funcția cu care lucrăm momentele de ordinele **2, 3** şi **4** sunt respectiv :

$$M_2(f) = 9,125 + 2 \times 1,125 \times 35 + 35^2 = 1312,875,$$

$$M_3(f) = 25,875 + 3 \times 9,125 \times 35 + 3 \times 1,125 \times 35^2 + 35^3 = 47993,375,$$

$$M_4(f) = 174,425 + 4 \times 25,875 \times 35 + 6 \times 9,125 \times 35^2 + 4 \times 1,125 \times 35^3 + 35^4 = 1764428,175 .$$

Aplicație

Nu este totdeauna important să utilizăm valorile exacte ale unor măsurători. Prelucrarea datelor trebuie făcută şi în acest caz. Vom ilustra modul de lucru pe următorul exemplu.

Cei **2000** pui dintr-o fermă au greutățile din următorul tabel

Clase de greutăți îm grame	Număr pui
1800-2000	128
2000-2200	170
2200-2400	280
2400-2600	800
2600-2800	320

Scanned with OKEN Scanner

2800-3000	180
3000-3200	120

Pentru a asocia caracteristici numerice unui astfel de tabel, îi asociem funcţia care ia ca valori valoarea centrală a fiecărei clase, adică

Centrul clasei	Număr pui
1900	128
2100	170
2300	280
2500	800
2700	320
2900	180
3100	120

S-a obţinut o funcţie pentru care se pot determina în mod obişnuit toate caracteristicile numerice. Evident aceste valori sunt diferite de cele ale funcţiei care ar asocia fiecărui pui greutatea sa în grame. Pentru a obţine valori mai apropiate de valorile reale se folosesc corecţiile lui Sheepard. Corecţiile pentru primele patru momente sunt

$$M'(f) = M(f) \qquad m'(f) = m(f) = 0$$

$$M_2'(f) = M_2(f) + \frac{d^2}{12} \qquad m_2'(f) = m_2(f) - \frac{d^2}{12}$$

$$M_3'(f) = M_3(f) + \frac{d^2}{4}M(f) \qquad m_3'(f) = m_3(f)$$

$$M_4'(f) = M_4(f) + \frac{d^2}{2}M_2(f) + \frac{d^4}{80} \qquad m_4'(f) = m_4(f) - \frac{d^2}{2}m_2(f) + \frac{7d^4}{240}$$

Propunem ca exerciţiu determinarea momentelor simple şi centrate de ordin ≤ 4 pentru seria de determinări cu clase de valori de mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

b) Caracteristici numerice de împrăştiere

1°.Amplitudinea

Amplitudinea A_f a funcţiei **f** este diferenţa dintre valoarea maximă şi cea minimă ale funcţiei. Pentru funcţia din Exemplul 18 p.21 amplitudinea este $A_f=10-5=5$.

2°.Dispersia (varianţa)

Considerăm funcţia (caracterul) $f: \Omega \to \mathbb{R}$ unde $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ Valorile ei pot fi mai mult sau mai puţin dispersate (depărtate unele de altele). Împrăştierea valorilor funcţiei **f** se măsoară cu ajutorul unui parametru numit *dispersie* sau *varianţă*.

Definiţia 9. *Dispersia* sau *varianţa* funcţiei **f** este numărul notat $D^2(f)$ sau cu σ_f^2 sau cu $V(f)$ definit prin:

$$D^2(f)=\sigma_f^2 \overset{def}{=} M[(f-M(f))^2]=V(f) \text{ adică: } D^2(f)=\frac{1}{n}\sum_{\omega\in\Omega}[f(\omega)-M(f)]^2.$$

Oricare ar fi funcţiile $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ *unde* $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ *au loc afirmaţiile*

Proprietăţile dispersiei

1°. $D^2(f) \geq 0$, $\forall$ **f**; $D^2(f)=0$ *dacă şi numai dacă* **f** *este funcţie constantă*

2°. $D^2(f)=M(f^2)-[M(f)]^2$,

3°. $D^2(af)=a^2D^2(f)$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $\forall$ **f**,

4°. $D^2(a+f)=D^2(f)$, $\forall$ **f** şi oricare ar fi funcţia constantă **a**,

Cantitatea $\sigma=\sigma_f=\sqrt{D^2(f)}$, se numeşte *abaterea pătratică* (de la) *medie* şi se măsoară cu aceeaşi unitate de măsură ca valorile funcţiei.

Exemplul 25. Pentru funcţia cu valorile x_i şi frecvenţele absolute n_i din primele două coloane ale tabelului de mai jos se poate calcula $M(f^2)$, dispersia $D^2(f)$ şi abaterea pătratică (de la) medie σ_f.

Scanned with OKEN Scanner

x_i	n_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
5	7	0,07	0,35	25	1,75
6	10	0,10	0,60	36	3,60
7	15	0,15	1,05	49	7,35
8	25	0,25	2,00	64	16,00
9	25	0,25	2,25	81	20,25
10	18	0,18	1,80	100	18,00
	Total=100	Total=1,00	M(f)=8,05		$M(f^2)$=66,95

Rezultă că $D^2(f)=66,95-(8,05)^2=2,1475$ şi $\sigma_f = \sqrt{2,1475} \cong 1,4654$.

Este important de remarcat că, pe baza proprietăţii 4, are loc egalitatea $D^2(f)= D^2(\theta_7(f))$ care permite obţinerea mai economică a valorii dispersiei. Evidenţiem acest lucru în tabelul următor.

x_i	n_i	f_i	x_i-x_0	$(x_i-x_0)^2$	$f_i(x_i-x_0)$	$f_i(x_i-x_0)^2$
5	7	0,07	-2	4	-0,14	0,28
6	10	0,10	-1	1	-0,10	0,10
7	15	0,15	0	0	0,00	0,00
8	25	0,25	1	1	0,25	0,25
9	25	0,25	2	4	0,50	1,00
10	18	0,18	3	9	0,54	1,62
	Total =100	Total=1,00			$M(\theta_7(f))$=1,05	$M_2(\theta_7(f))$=3,25

Exemplul 26. Pentru funcţia **f** din Exemplul 19 dispersia se calculează cu ajutorul formulei 2° şi se obţine

$$D^2(f)= m_2(f) =1312,875-(36,125)^2=7,859375.$$

Abaterea pătratică (de la) medie sau abaterea standard a funcţiei **f** este σ_f=2,8035.

3°Cuartile

Dată o funcţie cu domeniul finit, ale cărei valori sunt ordonate crescător, se pune problema să se determine cele trei numere care împart mulţimea valorilor funcţiei în patru părţi de cardinale aproximativ egale.

Prima cuartilă μ_1 se defineşte prin relaţiile:

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{1}{n}\cdot\left|\{\omega\in\Omega \text{ Ă } f(\omega)\le \mu \text{Ţ}\right|\ge\frac{1}{4} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{n}\cdot\left|\{\omega\in\Omega \mid f(\omega)\ge\mu\}\right|\ge\frac{3}{4}.$$

A treia cuartilă μ_3 se defineşte prin relaţiile:

$$\frac{1}{n}\cdot\left|\{\omega\in\Omega \mid f(\omega)\le\mu\}\right|\ge\frac{3}{4} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{n}\cdot\left|\{\omega\in\Omega \mid f(\omega)\ge\mu\}\right|\ge\frac{1}{4}.$$

Evident, a doua cuartilă μ_2 definită prin analogie cu μ_1 şi μ_3 este chiar mediana. Intervalul determinat de μ_1 şi μ_3 se numeşte *interval intercuartilic*, dar prin abuz de limbaj şi diferenţa $\mu_3-\mu_1$ se numeşte tot *interval intercuartilic*.

Exemplul 27. Dacă $|\Omega|=7$ şi f are valorile **1, 2, 2, 4, 4, 5, 6** atunci $\mu_1=2$, $\mu_2=4$, $\mu_3=5$. În general, dacă $|\Omega|=4p+3$ şi f are valorile $x_1, x_2, \ldots x_{4p+3}$ atunci $\mu_1=x_{p+1}$, $\mu_2=x_{2p+2}$, $\mu_3=x_{3p+3}$. În cazul $|\Omega|=8$ şi f are valorile **1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5** atunci $\mu_1=2$, $\mu_2=3$, $\mu_3=5$ iar dacă $|\Omega|=8$ şi f are valorile **1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 6** atunci $\mu_1=2$, μ_2 este orice număr cuprins între 3 şi 4 iar $\mu_3=4$.

Pentru funcţia din Exemplul 18 pag. 25, utilizând interpolarea liniară, găsim $\mu_1=6{,}53$, $\mu_2=7{,}72$, $\mu_3=8{,}72$.

Verificaţi că pentru funcţia din Exemplul 19 pag. 25 (pe baza Tabelului 3 şi utilizând interpolarea liniară) găsim

$\mu_1=33{,}250$, $\mu_2=35{,}750$, $\mu_3=38$ **(Verificaţi!).**

Evident, cuartilele nu sunt neapărat unic definite dar sunt estimatori robuşti în sensul că sunt mai puţin sensibili la prezenţa unor valori extreme mari. Calculul cuartilelor se face uşor utilizând funcţia de repartiţie a funcţiei (caracterului). Diferenţa intercuartilică are de jucat faţă de abaterea pătratică medie acelaşi rol pe care îl joacă mediana vis-à-vis de medie.

4°. Inegalitatea lui Cebîşev

Fie $f: \Omega\to\mathbb{R}$ cu $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$, $x_1,x_2,\ldots,x_m$ - valorile distincte ale funcţiei f şi f_i – frecvenţa relativă a valorii x_i ($i=1,2,\ldots,m$). Se pune problema să se determine frecvenţa relativă υ_ε a valorilor $f(\omega)$ ale funcţiei f pentru care $|f(\omega)-M(f)|<\varepsilon$, adică

Scanned with OKEN Scanner

$$\upsilon_\varepsilon = \frac{1}{n}\,\mathbf{card}\,\{\omega \in \Omega \,||\, f(\omega) - M(f)| < \varepsilon\}.$$

Suntem conduşi la inegalitatea (vezi [1] pag.54)

$$\upsilon_\varepsilon \geq 1 - \frac{D^2(f)}{\varepsilon^2}$$

cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Cebîşev.*

Exemplul 28. Revenind la Exemplul 18 prezentat la p.25, dacă dorim să estimăm frecvenţa relativă υ_ε a numărului de scroafe care fată între 6 şi 10 purcei (la o fătare) aplicăm formula lui Cebîşev cu $M(f)=8$, $\varepsilon=2$, $D^2(f)=2{,}1475$ şi obţinem $\upsilon_2 \geq 1 - \frac{2{,}1475}{4} \cong 0{,}46$, deci cel puţin **46%** dintre scroafe vor făta între 6 şi 10 purcei. Evident, această estimaţie este grosieră (vezi demonstraţia din [1], pag. 54) pentru că în realitate **93%** scroafe au fătat între 6 şi 10 purcei.

Exemplul 29. Revenind la Exemplul 19 prezentat anterior, dacă dorim să estimăm frecvenţa relativă υ_ε a numărului de oi care care au masa între **34** şi **38** kg aplicăm formula lui Cebîşev cu $M(f)=35{,}125$, $\varepsilon=2{,}875$, $D^2(f)=7{,}859375$ şi obţinem $\upsilon_2 \geq 1 - \frac{7{,}859375}{2{,}875^2} \cong 0{,}049$, deci cel puţin **4, 9%** dintre oi vor avea masa între **34** şi **38** kg. Evident, această estimaţie este grosieră (vezi demonstraţia din [1], pag. 54) dar are avantajul că este uşor de făcut. Într-adevăr, în realitate sunt **21** oi cu masa între **34** şi **38** kg, adică peste **50%**. Ineficienţa acestei inegalităţi în acest exemplu este motivată de faptul că ε^2 şi dispersia funcţiei au valori comparabile.

c) Alte caracteristici numerice ale funcţiilor

1°. Coeficientul de variabilitate

Coeficientul de variabilitate (Pearson) al funcţiei **f** este numărul notat prin **C.V.(f)=C.V.** definit prin formula

$$C.V. = \frac{\sigma_f}{M(f)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În practică se obişnuieşte să se folosească *coeficientul de variabilitate procentual* **C.V.%** definit prin **C.V.%= C.V.·100.**

În zootehnie funcţionează următoarea convenţie:

0 < C.V.% < 10% - variabilitatea este mică,

10% < C.V.% < 20% - variabilitatea este medie,

C.V.% > 20% - variabilitatea este mare.

De exemplu, pentru funcţia din Exemplul 18 avem

$$\text{C.V.}=\frac{1,4654}{8,05}\cong 0,182 \text{ sau C.V.\%=18,2\%}$$

iar pentru funcţia din Exemplul 19 avem

$$\text{C.V.}=\frac{2,8035}{35,125}\cong 0,0798 \text{ sau C.V.\%=7,8\%<10\%.}$$

Apreciem deci că variabilitatea este medie în primul caz şi mică în al doilea caz.

2°. Coeficienţii de asimetrie Pearson şi Fisher

Numărul $\beta_1(f) = \beta_1$ definit prin $\beta_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} = \frac{m_3^2}{\sigma^6}$ se numeşte *coeficientul de asimetrie* Pearson al funcţiei **f;** numărul $\gamma_1(f)= \gamma_1$ definit prin $\gamma_1(f) = \frac{m_3(f)}{\sigma_f^3}$ se numeşte *coeficientul de asimetrie* Fisher al funcţiei **f.** Evident, adică $\gamma_1 = \pm\sqrt{\beta_1}$ $\beta_1 = \gamma_1^2$. β_1 şi γ_1 dau infor-maţii asupra abaterii graficului funcţiei **f** de la simetria în raport cu dreapta **x=M(f).** γ_1 nuanţează interpretările.

3°. Coeficientul de boltire / aplatizare

Numărul $\beta_2(f)= \beta_2$ definit prin $\gamma_2(f) = \frac{m_4(f)}{\sigma_f^4}$ se numeşte *coeficientul de boltire aplatizare* (a fost introdus de Pearson) al funcţiei **f;** β_2 dă informaţii asupra turtirii graficului funcţiei **f.** Fisher a introdus numărul $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ care dă informaţii asupra turtirii graficului funcţiei

Scanned with OKEN Scanner

f comparativ cu graficul distribuţiei normale cu aceeaşi medie (vezi [2], pag. 90.

Exemplul 30. Vom determina coeficientul de asimetrie şi cel de aplatizare pentru funcţia din Exemplul 18. Construim tabelul

x_i	n_i	f_i	x_i-x_0	$(x_i-x_0)^2$	$f_i(x_i-x_0)$	$f_i(x_i-x_0)^2$	$f_i(x_i-x_0)^3$	$f_i(x_i-x_0)^4$
5	7	0,07	-2	4	-0,14	0,28	-0,56	1,12
6	10	0,10	-1	1	-0,10	0,10	-0,10	0,10
7	15	0,15	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00
8	25	0,25	1	1	0,25	0,25	0,25	0,25
9	25	0,25	2	4	0,50	1,00	2,00	4,00
10	18	0,18	3	9	0,54	1,62	4,86	14,58
	Total =100	Total =1,00			$M(\theta_7(f)$ =1,05	$M_2(\theta_7(f))$ =3,25	$M_3(\theta_7(f))$ =6,45	$M_4(\theta_7(f))$ =20,05

Ştim că $M(f)=8,05$, $M_2(f)=66,95$, iar pe baza formulelor din Exerciţiul 26 obţinem

$$M_3(f)=6,45+3\cdot 3,25\cdot 7+3\cdot 1,05\cdot 49+343=572,05\,,$$

$$M_4(f)=20,05+4\cdot 6,45\cdot 7+6\cdot 3,25\cdot 49+4\cdot 1,05\cdot 343+2401=4997,75$$

$$m_3=572,05-3\cdot 1,05\cdot 66,95+2\cdot 1,05^3=363,47$$

$$m_4=4997,75-4\cdot 1,05\cdot 572,05+6\cdot 1,05^2\cdot 66,95-3\cdot 1,05^4=3034,37$$

Atunci

$\gamma_1=\dfrac{363,47}{1,4654^3}=\dfrac{363,47}{3,1468}\cong 115,5046$, $\gamma_2=\dfrac{3034,37}{4,61176}\cong 657,96>>3$. Se poate aprecia că graficul funcţiei este o curbă leptocurtică cu o asimetrie mare.

Evident, m_3 şi m_4 se puteau calcula direct pe baza definiţiilor sau se putea folosi „centrarea" în $x_0=8$ **(exerciţiu!)**.

Pentru funcţia din Exemplul 19 se calculează, cu ajutorul formulelor din Exerciţiul 26 şi al formulei de definiţie pentru γ_1

$$m_3(f) = -2,07421875 \quad \gamma_1 = -0,094139\,.$$

Se poate accepta că asimetria este mică.

În fapt, toate momentele centrate de ordin impar dau informaţii asupra abaterilor de la simetrie. Aceşti indicatori sunt sensibili la prezenţa valorilor extreme mari. Există şi indicatori robuşti ai abaterilor de

Scanned with OKEN Scanner

la simetrie dintre care citățm *coeficientul de disimetrie* **c=c(f)** şi *indicele asimetriei* $A_s=A_s(f)$ (Pearson).

Coeficientul de disimetrie este definit prin

$$c = c(f) = \frac{\mu_1 + \mu_3 - 2\mu_2}{\mu_3 - \mu_1}.$$

c ia valori între –1 şi +1. Se fac următoarele constatări:

c=0 atunci când graficul este simetric,

c>0 şi mai apropiat de +1 dacă graficul are ramura dreaptă de pantă lină,

c<0 şi mai apropiat de -1 dacă graficul are ramura stângă de pantă lină.

De exemplu, pentru funcția din Exemplul 19 coeficientul de disimetrie este

$$c = \frac{33{,}250 + 38 - 2 \cdot 35{,}750}{38 - 33{,}250} \cong -0{,}05882 \cong -0{,}06 .$$

Se apreciază că asimetria este mică, cu graficul uşor abătut spre dreapta (ramura stângă de pantă mai lină).

Indicele asimetriei (Pearson) este

$$A_s(f) = A_s = \frac{M(f) - Mo(f)}{\sigma_f}.$$

Dacă $A_s< 0$ distribuția punctelor graficului are asimetrie dreaptă (ramura stângă de pantă mai lină), dacă $A_s>0$ distribuția punctelor graficului are asimetrie stângă (ramura dreaptă de pantă mai lină) iar dacă $A_s=0$ distribuția este aproape simetrică. Evident, acest indicator se foloseşte numai pentru funcții unimodale.

d) Caracteristici numerice pentru familii de funcții

1°. Covarianța a două funcții (caractere)

Fie **f, g**: $\Omega \to \mathbb{R}$ două funcții (caractere) definite pe mulțimea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

Se numeşte *covarianța* perechii **(f,g)** numărul notat cu **S(f,g)** definit ca medie a variabilei $h = (f - M(f)) \cdot (g - M(g))$, adică :

Scanned with OKEN Scanner

$$S(f,g) = M[(f - M(f)) \cdot (g - M(g))].$$

Covarianţa este pozitivă când **h** ia "*în dominantă*" valori pozitive, adică covarianţa este *pozitivă* când **f** şi **g** au tendinţa să varieze în acelaşi sens şi *negativă* când **f** şi **g** au tendinţa să varieze în sensuri contrare.

Evident $S(f,f) = D^2(f)$, adică dispersia este un caz particular al covarianţei.

În practică, în locul covarianţei (corelaţiei) se foloseşte des un alt indicator al dependenţei dintre două funcţii şi anume *coeficientul de corelaţie* care are avantajul că este adimensional şi are o interpretare geometrică simplă ca fiind cosinusul unghiului a doi vectori din $\mathbb{R}^n$.

Se numeşte *coeficientul de corelaţie* al funcţiilor **f, g** numărul notat cu $\rho(f, g)$ definit prin:

$$\rho(f,g) = \frac{S(f,g)}{\sqrt{D^2(f) \cdot D^2(g)}}.$$

Coeficientul de corelaţie este o măsură a intensităţii unei legături liniare între **f** şi **g**.

Proprietăţile coeficientului de corelaţie

1°. $\rho(f,g) = \rho(g,f)$, $\forall f, g: \Omega \to \mathbb{R}$

2°. $\rho(\alpha f, \beta g) = \frac{\alpha\beta}{|\alpha\beta|}\rho(f,g)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g: \Omega \to \mathbb{R}$

3°. $\rho(f - a, g - b) = \rho(g,f)$, $\forall f, g: \Omega \to \mathbb{R}$, $\forall$ funcţiile constante **a** şi **b**

Inegalitatea Cauchy-Schwartz-Buniakowschi asigură că totdeauna $|\rho(f,g)| \le 1$ şi că $|\rho(f,g)| = 1$ dacă şi numai dacă între funcţiile **f** şi **g** există o relaţie de forma $af + bg + c = 0$ cu $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 27. Scrieţi formulele pe baza cărora se fac calculele pentru determinarea directă a covarianţei şi a coeficientului de corelaţie. Verificaţi-vă pe baza formulelor (9) şi(11) din [1], pag.56 şi 57.

Exemplul 31. În urma unei experienţe în care s-au urmărit două caractere **X** şi **Y** s-au obţinut următoarele date

Scanned with OKEN Scanner

X	1,24	1,43	1,60	1,66	1,73	1,82	1,85	1,90	1,98
Y	0,57	0,14	0,75	0,60	0,50	0,35	0,25	0;19	0,97

Ne propunem să determinăm covarianţa şi coeficientul de corelaţie al celor două caractere. Putem aplica direct definiţiile dar putem apela la "centrări" convenabile. Avem M(X)=1,69 şi M(Y)=0,48.

X	Y	X-1,69	Y-0,48	(X-1,69)(Y-0,48)	$(X-1,69)^2$	$(Y-0,48)^2$
1,24	0,57	-0,45	0,09	-0,0405	0,2025	0,0081
1,43	0,14	-0,26	-0,34	0,0884	0,0676	0,1156
1,60	0,75	-0,09	0,27	-0,0243	0,0081	0,0729
1,66	0,60	-0,03	0,12	-0,0036	0,0009	0,0144
1,73	0,50	0,04	0,02	0,0008	0,0016	0,0004
1,82	0,35	0,13	-0,13	0,0169	0,0169	0,0169
1,85	0,25	0,16	-0,23	0,0368	0,0256	0,0529
1,90	0,19	0,21	-0,29	0,0609	0,0441	0,0841
1,98	0,97	0,29	0,49	0,1421	0,0841	0,2401
Suma= =15,21	Suma= =4,32	Suma= =0	Suma= =0	Suma= =0,0483	Suma= =0,4514	Suma= =0,6054

Atunci $S(X,Y)=\frac{0,0483}{9}=0,054$ adică **X** şi **Y** sunt foarte slab corelate. În plus,

$$D^2(X)=0,0501,\ D^2(Y)=0,0673\ ,\ \sigma_X=0,2239,\ \sigma_Y=0,2594$$

$$\rho(X,Y)=\frac{0,054}{0,2239\cdot 0,2594}=\frac{0,0315}{0,05807966}\cong 0,09297\ .$$

2°. Matricea de covarianţă (corelaţie) a p funcţii

Date **p** funcţii $f_1, f_2,..., f_p : \Omega \to \mathbb{R}$ unde $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$, se defineşte *matricea de covarianţă* ca fiind **p** × **p**-matricea $S(f_1, f_2,..., f_p) = [s_{ij}]$, unde $s_{ij} = S(f_i, f_j)$.

Se poate defini şi matricea coeficienţilor de corelaţie $R(f_1, f_2,..., f_p) = [\rho_{ij}]$, unde $\rho_{ij} = \rho(f_i, f_j)$ pentru $i \neq j$ şi $\rho_{ii} = 1$ pentru $i = 1,2,...,n$.

Exerciţiul 28. Se studiază pentru 11 specii de pescăruşi din genul *Larus* următoarele trei variabile:

- **X** – greutatea adultului (în grame)
- **Y** – vârsta de maturitate sexuală (în ani)

Scanned with OKEN Scanner

- **Z** – durata de incubaţie a ouălelor (în zile).

Rezultatele sunt prezentate în tabelul de mai jos:

X	1050	770	400	500	800	1500	1700	120	320	300	360
Y	4,0	3,0	2,5	2,5	4,0	4,0	5,0	2,0	2,5	2,0	2,5
Z	28	25	26	25	26	28	27	21	24	23	21

Arătaţi că matricea de covarianţă a celor trei caractere (funcţii) este

$$S(X,Y,Z)=\begin{bmatrix} 266249 & 482{,}91 & 1012{,}10 \\ 482{,}91 & 0{,}991 & 1{,}910 \\ 1012{,}10 & 1{,}910 & 6{,}091 \end{bmatrix}.$$

Determinaţi apoi matricea de corelaţie $\rho(X, Z, Y)$ a celor trei caractere. Studiaţi legătura dintre **X** şi **Y**. Ştiind că *Larus modestus* are durata de incubaţie de **21** zile şi atinge maturitatea sexuală la **2,5** ani preziceţi greutatea medie a unui adult din această specie.

Remarca 2. Am prezentat elemente de studiul corelaţiilor pentru funcţii numerice. Se pot defini aceste noţiuni şi pentru caractere calitative sau ordinale.

3°. Regresia liniară

Fie **f,g:** $\Omega \to \mathbb{R}$ două funcţii (caractere) definite pe $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Ne propunem să găsim funcţia de forma **a + bf** (liniară în **f**) care să descrie cel mai bine comportarea lui **g** . Aceasta înseamnă să determinăm numerele **a** şi **b** care minimizează expresia:

$$h(a,b)=\sum_{\omega\in\Omega}[g(\omega)-a-bf(\omega)]^2=n\cdot M((g-a-b\cdot f)^2)$$

Se demonstrează că funcţia **h(a,b)** ia valoare minimă $h(a_0,b_0)$ unde:

$$a_0=M(g)-b_0\,M(f) \quad \text{şi} \quad b_0=\frac{S(f,g)}{D^2(f)}.$$

Numerele a_0 şi b_0 se numesc *coeficienţii* regresiei funcţiei **g** asupra funcţiei **f.** Dreapta $y=a_0+b_0\,x$ se numeşte *dreapta de regresie* a lui **g** asupra lui **f** sau *regresia* caracterului **g** asupra caracterului **f.** Similar se

Scanned with OKEN Scanner

defineşte regresia lui **f** asupra lui **g**; dreapta de regresie a lui **f** asupra lui **g** este $x = a_1 + b_1 y$, unde

$$a_1 = M(f) - b_1 M(g) \qquad b_1 = \frac{S(f,g)}{D^2(g)}.$$

Exemplul 32. Dreapta de regresie a caracterului **Y** asupra caracterului **X** are ecuaţia

$$y = \frac{0,0054}{0,0501}x + 0,48 - \frac{0,0054}{0,0501}\cdot 1,69 \quad \text{adică} \quad y=0,1078\,x+0,5826.$$

Similar se găseşte că dreapta de regresie a caracterului **X** asupra caracterului **Y** are ecuaţia

$$x=0,02082y+1,68001\,.$$

Exerciţiul 29. Rezultatele măsurătorilor a două caractere cantitative **f** şi **g** sunt înregistrate în tabelul următor

i	1	2	3	4	5	6	7	8
f	0,25	0,37	0,44	0,55	0,60	0,62	0,68	0,70
g	2,57	2,31	2,12	1,92	1,75	1,71	1,60	1,51

.....

I	9	10	11	12	13	14	15	16	17
F	0,73	0,75	0,82	0,84	0,87	0,88	0,90	0,95	1,00
g	1,50	1,41	1,33	1,31	1,25	1,20	1,19	1,15	1,00

Verificaţi că:

$M(f) = 0,7029,\ M(g) = 1,5782,\ D^2(f)=0,0418,\ \sigma_f=0,2042,$
$D^2(g)=0,1806,\ \sigma_g=0,4250,\ S(f, g)=-0,0863,\ \rho(f, g) = 0,09943.$

Determinaţi apoi dreapta de regresie a caracterului **f** asupra lui **g** şi a caracterului **g** asupra lui **f**.

Aplicaţie

Pentru un hibbrid de porumb **H** dorim să analizăm două caracteristici, lungimea ştiuletelui şi numărul de boabe pe rând , în vederea comparării cu alţi hibrizi. În acest scop se aleg **15** ştiuleţi pentru care se determină valorile celor două caracteristici. Datele obţinute sunt înregistrate în Tabelul 6.

Acestui tabel îi asociem funcţiile cu valori reale **f** şi **g** definite pe mulţimea $D = \{1, 2, \ldots, 15\}$ prin legile de corespondenţă $f(i) = x_i$ şi $g(i) = y_i$ (tabelul este de fapt definiţia sintetică a celor două funcţii).

Scanned with OKEN Scanner

Ne propunem să determinăm covarianţa, coeficientul de corelaţie, regresia funcţiei **f** asupra funciei **g** şi regresia funcţiei **g** asupra funcţiei **f**.

Datele necesare determinării acestor caracteristici numerice sunt conţinute în Tabelul 7.

Tabelul 6

Nr.crt.	Lung.ştiul. mm x_i	Nr. boabe/rând y_i
1	188	36
2	185	38
3	166	41
4	158	32
5	162	41
6	173	39
7	177	42
8	156	37
9	168	35
10	182	46
11	171	45
12	157	38
13	156	37
14	179	36
15	187	42
	M(f)=171	M(g)=39

Tabelul 7

Nr. Crt.	Lung.ştiul. mm x_i	Nr. boabe/ rând y_i	x_i – -M(f)	y_i – - M(g)	$(x_i - M(f))\times (y_i - M(g))$	$(x_i - M(f))^2$	$(y_i - M(g))^2$
1	188	36	17	-3	-51	329	9
2	185	38	14	-1	-14	196	1
3	166	41	-5	2	-10	25	4
4	158	32	-13	-7	91	169	49
5	162	41	-9	2	-18	81	4
6	173	39	2	0	0	4	0
7	177	42	6	3	18	36	9
8	156	37	-15	-2	30	225	4
9	168	35	-3	-4	12	9	16
10	182	46	11	7	77	121	49
11	171	45	0	6	0	0	36
12	157	38	-14	-1	14	196	1
13	156	37	-15	-2	30	225	4
14	179	36	8	-3	-24	64	9

Scanned with OKEN Scanner

15	187	42	16	3	48	256	9
	M(f)= =171	M(g)= 39			S(f,g)= =13,(3)	$D^2(f)$= =129,0(6)	$D^2(g)$= =13,6

Covarianţa **S(f,g) = 13,(3)** este pozitivă şi indică faptul că cele două caractere variază în dominantă în acelaşi fel. Coeficientul de corelaţie este

$$\rho(f,g) = \frac{13,(3)}{\sqrt{129,0(6)} \cdot \sqrt{13,6}} \approx 0,317$$

Faptul că **ρ(f,g)** are valoarea apropiată de zero nu se interpretează ca semn al unei slabe dependenţe între cele două caractere ci ca un semn al lipsei unei dependenţe de tip liniar între cele două funcţii. Într-adevăr, există exemple de caractere (funcţii) legate prin relaţii funcţionale nebanale pentru care coeficientul de corelaţie este nul.

Dreapta de regresie a funcţiei **f** asupra funcţiei **g** este de forma $x = = c_0 + d_0 y$, unde

$$d_0 = \frac{13,(3)}{13,6} \approx 0.98, \quad c_0 = 171 - 0,98 \cdot 39 = 132,78$$

adică **x= 132,78 + 0,98 y** este dreapta de regresie căutată. Similar se determină şi coeficienţii dreptei de regresie a funcţiei **g** asupra funcţiei **f**; se obţin valorile

$$b_0 = \frac{13,(6)}{129,0(6)} \approx 0,105, \quad a_0 \approx 21,045$$

adică **y = 21,045 + 0,105 x** este dreapta de regresie căutată.

Trebuie menţionat că în acest caz am determinat cele două drepte de regresie pentru a exemplifica concret modul de lucru în acest caz. Aşa cum am menţionat mai sus , faptul că **ρ(f,g)** este apropiat de zero ne spune că aproximările $f \approx c_0 + d_0 g$ şi $g \approx a_0 + b_0 f$ nu sunt utilizabile. Acest lucru se vede din Tabelul 8.

Tabelul 8

Nr.crt.	x_i	$c_0+d_0y_i$	y_i	$a_0+b_0x_i$
1	188	168,06	36	40,785
2	185	170,02	38	40,470
3	166	172,96	41	38,475
4	158	163.36	32	37,635
5	162	172,96	41	38,055
6	173	171,00	39	39,210
7	177	173,94	42	39,630
8	156	169,04	37	37,425
9	168	167,08	35	38,685

Scanned with OKEN Scanner

10	182	177,86	46	40,155
11	171	177,08	45	39,000
12	157	170,02	38	37,530
13	156	169,04	37	37,425
14	179	168,06	36	39,840
15	187	173,94	42	40,680

Acceptând cele două aproximări, apare problema să decidem care dintre ele este mai bună. Pe baza analizei Tabelului 8, s-ar părea că aproximarea $g \approx a_0 + b_0 f$ este mai bună decât aproximarea $f \approx c_0 + d_0 g$, dar lucrurile nu sunt clare doar dintr-o simplă analiză a tabelului. Într-adevăr abaterea de **20 mm** raportată la valoarea medie **171 mm** este comparabilă cu abaterea de **4,785** raportată la media **39** . Prin urmare cele două aproximări sunt la fel de bune sau la fel de rele. Prin urmare, o comparație a două astfel de aproximări trebuie făcută pe criterii clare, cum este – de exemplu - raportarea la valoarea medie și de preferat aproximarea corespunzătoare raportului minim.

Trebuie remarcat că de această dată am calculat caracteristicile cerute direct pe baza definițiilor lor. Acest lucru a fost avantajos de făcut din următoarele motive :

- mediile funcțiilor **f** și **g** sunt numere întregi,
- frecvențele absolute ale valorilor funcțiilor sunt , în marea lor majoritate, egale cu **1** ,
- valorile funcțiilor sunt mici

Simplul fapt că valorile mediilor funcțiilor sunt numere întregi era un motiv suficient de bun pentru a face centrările în aceste medii.

În sfârșit, trebuie menționat că deși caracteristicile numerice se pot calcula totdeauna ele nu se pot utiliza totdeauna în interpretarea rezultatelor. Rezultatele de mai sus cu privire la dreptele de regresie ne exemplifică această afirmație. Astfel de calcule se fac în mod obișnuit în statistica descriptivă. Rezultatele lor sugerează anumite concluzii care sunt sau nu validate prin metodele statisticii decizionale (inferențiale).

Exercițiul 30. Se cântăresc păstăi de fasole înregistrându-se simultan și numărul de boabe din fiecare păstaie. Datele se înregistrează sub forma următorului tabel.

Scanned with OKEN Scanner

							n=
12					2		
11						1	
10						1	
9				4	4	4	
8			1	5	2	3	
7			3	8	3		
6			18	24	4		
5		7	22	9	3		
4		16	15				
3	3	19	3				
2	7	4					
1	4						
↑Y X →	1	2	3	4	5	6	

Identificați funcțiile **X** și **Y** care iau ca valori numărul de boabe și greutatea în grame. Determinați apoi covarianța, coeficientul de corelație și dreptele de regresie corespunzătoare acestor funcții.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

ELEMENTE DE ALGEBRĂ ABSTRACTĂ

Problemele din ce în ce mai complexe puse ştiinţei contemporane spre rezolvare au impus transpunerea acestora în limbaj algebric în speranţa că vor deveni mai accesibile. Speranţele au fost parţial justificate de succesele obţinute utilizând elemente de teoria semigrupurilor, grupurilor, inelelor şi câmpurilor finite în rezolvarea unor probleme de genetică, chimie, fizică, cristalografie, artă, etc..

§1. Lege de compoziţie

Definiţia 1. Fie **M** o mulţime nevidă. Se numeşte *lege de compoziţie* sau *operaţie binară* pe **M** orice aplicaţie $\varphi : M \times M \to M$. Pentru orice $(x,y) \in M \times M$, elementul $z=\varphi(x,y)$ se numeşte *compusul* lui **x** cu **y** prin legea de compoziţie φ.

În locul notaţiei $\varphi(x,y)$, pentru compusul elementelor **x** şi **y**, se preferă să se folosească notaţii de forma :$x+y$, $x \bullet y$, $x*y$, $x \vee y$, $x \wedge y$, $x \perp y$, $x \circ y$, etc..

Exerciţiul 1. Definiţi similar noţiunile de operaţie unară, ternară, ..., **n**-ară. Daţi exemple.

Pentru a arăta că pe mulţimea **M** este dată legea de compoziţie (operaţia) φ se folosesc notaţiile (M,φ) sau $M(\varphi)$.

Exemplul 1. 1°. Adunarea (+) şi înmulţirea ($\cdot$) sunt operaţii binare pe fiecare dintre mulţimile de numere cunoscute $\mathbb{N}$, **Z** ,**Q**, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Scăderea (-) nu este operaţie pe $\mathbb{N}$, dar este operaţie pe **Z**, **Q** , $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. 2°. Reuniunea ($\cup$), intersecţia ($\cap$), diferenţa ($\setminus$) şi diferenţa simetrică (Δ) sunt operaţii binare pe mulţimea $\mathcal{P}(X)$ a tuturor părţilor mulţimii nevide **X**. 3°. Pe mulţimea $\mathcal{A}(X)$ a tuturor funcţiilor de la **X** la **X** compunerea

Scanned with OKEN Scanner

funcţiilor este operaţie binară .4°. Pe mulţimea $\mathbf{R_n} = \{ 0, 1, 2, \dots, n-1 \}$ se definesc operaţiile: *adunarea modulo* **n** ($\oplus$) şi *înmulţirea modulo* **n** ($\odot$).

Exerciţiul 2. Definiţi operaţiile: *adunarea modulo* **n** ($\oplus$) şi *înmulţirea modulo* **n** ($\odot$) pe $\mathbb{N}$ şi pe $\mathbf{R_n}$. Întocmiţi tablele Cayley pentru $\mathbf{R_4}$. Verificaţi-vă pe baza manualului [1], pag. 66.

O mulţime nevidă dotată cu una sau mai multe operaţii (binare sau nu) se numeşte *structură algebrică* sau *sistem algebric*.

Definiţia 2. Operaţia binară $\varphi : M \times M \to M$ se numeşte:

1°. **asociativă** dacă $\varphi(\varphi(x,y),z) = \varphi(x,\varphi(y,z)) \quad \forall x,y,z \in M$.

2°. **comutativă** dacă $\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \quad \forall x,y \in M$.

Exerciţiul 3. În cazul în care operaţia binară este notată cu "$*$","$+$" şi "$\cdot$" explicitaţi proprietăţile de asociativitate şi comutativitate.

Exerciţiul 4. Folosind eventual modelul din [1] pag.67, scrieţi tablele Cayley pentru $\mathbf{R_5}$ dotat cu operaţiile de adunare şi înmulţire modulo **5**. Evidenţiaţi elementele constitutive ale funcţiilor:

$$\mathscr{L}_2 : R_5 \to R_5,\ \mathscr{L}_2(x) = 2 \odot x,\ \mathscr{R}_3 : R_5 \to R_5,\ \mathscr{R}_2(x) = x \odot 2,\ \forall x \in R_5.$$

Exemplul 2.1°. Adunarea (+) şi înmulţirea ($\cdot$) sunt operaţii şi asociative şi comutative pe fiecare dintre mulţimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. 2°. Reuniunea "$\cup$" şi intersecţia "$\cap$" sunt operaţii şi asociative şi comutative pe mulţimea $\mathscr{P}(\mathbf{X})$. 3°. Compunerea ($\circ$) funcţiilor de la **X** la **X** este operaţie asociativă pe mulţimea $\mathscr{F}(\mathbf{X})$ dar nu este comutativă când **X** are cel puţin două elemente .4°. Scăderea (-) pe $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ este operaţie şi neasociativă şi necomutativă.

Definiţia 3. Elementul $e \in M$ se numeşte *element neutru* pentru legea de compoziţie "$*$", sau *element neutru* pentru $M(*)$, dacă satisface condiţia: $e * x = x * e = x, \forall x \in M$.

Dacă există element neutru pentru o operaţie binară "$*$", acesta este unic.

Exerciţiul 5. Daţi exemple de operaţii binare care au element unitate şi exemple de operaţii binare care nu au element unitate.

Definiţia 4. Fie "$*$" o operaţie binară pe **M** având elementul neutru **e**. Elementul **x** se numeşte *simetrizabil* dacă există $x' \in M$ astfel

Scanned with OKEN Scanner

încât $x * x' = x' * x = e$. În acest caz x' se numeşte *simetricul* elementului x.

Dacă x' este simetricul lui x, atunci x este simetric pentru x', adică $x=(x')'$.

Exerciţiul 6. Daţi exemple de elemente simetrizabile.

Definiţia 5. Se spune că operaţia "$*$" este :

1°. *distributivă la stânga* în raport cu operaţia "$\cdot$" dacă

$$x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z), \ \forall x, y, z \in M;$$

2°. *distributivă la dreapta* în raport cu operaţia "$\cdot$" dacă

$$(y \cdot z) * x = (y * x) \cdot (z * x), \ \forall x, y, z \in M,$$

3°. *distributivă* dacă este şi distributivă şi la stânga şi la dreapta.

Exerciţiul 7. Daţi exemple de legi de compoziţie distributive numai la stânga, numai la dreapta, respectiv bilateral.

§2. Parte stabilă. Lege de compoziţie indusă

Definiţia 6. Fie $M(*)$ şi H o parte nevidă a lui M. Se spune că H este *parte stabilă* a lui M în raport cu operaţia "$*$" dacă $\forall x, y \in H \Rightarrow x*y \in H$. Restricţia operaţiei "$*$" la $H \times H$ este lege de compoziţie pe H şi se numeşte *legea de compoziţie indusă* de "$*$" pe H; legea de compoziţie indusă de "$*$" pe partea stabilă H se va nota tot cu "$*$" (ca şi legea din care provine).

Exemplul 3.1°. Mulţimea $2Z$ a tuturor numerelor întregi pare este parte stabilă în $Z(+)$ şi în $Z(\cdot)$. Mulţimea tuturor numerelor întregi impare nu este stabilă în $Z(+)$ dar este stabilă în $Z(\cdot)$.2°. $\mathbb{R}^*(\cdot)$ este parte stabilă în $\mathbb{R}(\cdot)$. 3°. $\mathbb{R}(+,\cdot)$ este parte stabilă în $\mathbb{C}(+,\cdot)$ şi în raport cu operaţia de adunare şi în raport cu operaţia de înmulţire.

§3. Structuri algebrice de bază

Definiţia 7. $M(*)$ se numeşte

1°. *semigrup* dacă "$*$" este operaţie asociativă,

2°. *monoid* dacă $M(*)$ este semigrup cu element neutru,

3°. *cvasigrup* dacă ecuaţiile $a * x = b$ şi $x * a = b$ au soluţii unice oricare ar fi $a, b \in M$;

4°. *loop* (sau *buclă*) dacă este cvasigrup cu element neutru

Scanned with OKEN Scanner

5°. *grup* dacă este monoid pentru care fiecare element este simetrizabil. Dacă în plus "*" este şi comutativă **M(*)** se numeşte *semigrup comutativ, monoid comutativ, cvasigrup comutativ, loop comutativ şi respectiv grup comutativ* (sau *abelian*).

Exemplul 4. 1°. $\mathbb{N}^*(+)$ este semigrup comutativ. 2°. $\mathbb{N}_k(+)$ şi $\mathbb{N}_k(\cdot)$ sunt semigrupuri comutative (aici $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, \ldots\}$). 3°. $\mathbb{N}(+)$, $\mathbb{Z}(+)$ sunt monoizi comutativi. 4°. $\mathcal{F}(X)(\circ)$ este monoid (necomutativ dacă **X** are cel puţin două elemente). 5°. Mulţimea $\mathbb{R}^*$ a tuturor numerelor reale nenule, dotată cu operaţia "•" definită prin $x \bullet y = x^3 \cdot y$ $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^*$ este cvasigrup (necomutativ). 6°. $\mathbb{Z}(+)$, $\mathbb{Q}(+)$, $\mathbb{R}(+)$, $\mathbb{C}(+)$ sunt grupuri comutative (abeliene).7°. Mulţimea S_n a tuturor permutărilor de $n > 2$ elemente este grup (necomutativ!) în raport cu operaţia de compunere a permutărilor.

Exerciţiul 8. Daţi exemple de grupuri de matrice.

Orice aplicaţie $f: M(\bullet) \to M_1(*)$ se numeşte *homomorfism* dacă

$$f(x \bullet y) = f(x) * f(y), \quad \forall x, y \in M.$$

Un homomorfism bijectiv se numeşte *izomorfism*.

Un exemplu important de semigrupuri îl constituie aşa-numitele *semigrupuri libere*. Fie **A** o mulţime nevidă pe care o vom numi *alfabet* şi ale cărei elemente le vom numi *litere*. Orice succesiune finită de litere o vom numi *cuvânt*. Vom nota cu $\mathcal{F}_A$ mulţimea tuturor cuvintelor formate cu litere din **A**. Vom defini pe mulţimea $\mathcal{F}_A$ operaţia de juxtapunere (concatenare) prin care alăturând două cuvinte se obţine un nou cuvânt. $\mathcal{F}_A$ devine atunci un semigrup. Dacă vom accepta că $\mathcal{F}_A$ conţine cuvântul vid atunci $\mathcal{F}_A$ devine monoid.

Un exemplu concret de astfel de semigrup este legat de mulţimea proteinelor. Într-adevăr, se ştie că există **20** de acizi aminici (alanina, glicina, glutamina, valina, etc.) din care se formează fiecare proteină ca o succesiune de astfel de acizi, adică fiecare proteină este un cuvânt din semigrupul liber generat de cei **20** acizi aminaţi. De exemplu, o moleculă de hemoglobină conţine aproximativ **635** acizi aminici , adică este un cuvânt cu **635** litere.

Dacă **M(*)** este cvasigrup, pentru orice $a \in M$ se pot defini aplicaţiile $L_a, R_a : M \to M$ prin:

Scanned with OKEN Scanner

$$L_a(x) = a * x, \quad R_a(x) = x * a \quad \forall x \in M.$$

L_a , R_a se numesc *translaţia* (*multiplicarea*) *stângă prin* **a** şi respectiv *translaţia* (*multiplicarea*) *dreaptă prin* **a**. În orice cvasigrup, loop sau grup, toate translaţiile stângi şi toate translaţiile drepte sunt aplicaţii bijective.

Exerciţiul 9. Cum interpretaţi bijectivitatea translaţiilor stângi şi/sau drepte pentru structurile algebrice de ordin finit? Concretizaţi pentru cvasigrupuri şi loopuri. Verificaţi-vă pe baza manualului [1], pag. 73.

Exerciţiul 10. Enumeraţi proprietăţile şi regulile de calcul ale structurilor algebrice enumerate mai sus.

Definiţia 8 Submulţimea nevidă **H** a grupului **G(*)** se numeşte *subgrup* dacă este parte stabilă pe care legea de compoziţie indusă de "*" o organizează ca grup.

Exerciţiul 11. Enumeraţi proprietăţile caracteristice ale subgrupurilor şi daţi exemple de subgrupuri.

Aplicaţii ale grupurilor

Iniţial s-au folosit elemente de algebră liniară pentru a determina invarianţi numerici ai structurilor concrete studiate. S-a constatat că aceşti invarianţi numerici nu sunt totdeauna suficienţi. De fapt, s-a renunţat treptat la ideea că toţi invarianţii trebuie să fie numerici. Faptul că simetria unui cristal implică uneori lipsa activităţii sale optice sau că simetria unei molecule poate prezice frecvenţele sale active în infraroşu şi Raman au dus la ideea că trebuie introdusă o măsură a simetriei figurilor. Grupurile sunt structurile algebrice utilizate ca măsură a simetriei unei figuri.

Trebuie amintit că, în prezent, cuvântul *simetrie* circulă cu două înţelesuri: 1. *simetric* înseamnă ceva bine proporţionat, bine echilibrat, iar *simetria* desemnează acea concordanţă a mai multor părţi prin care ele se înglobează într-un întreg, dând frumuseţe acestuia, 2. *simetric* înseamnă existenţa unei simetrii bilaterale care se traduce matematic prin invarianţă la rotaţii şi translaţii.

Ca exemplu citãm simetria moleculară. Atomii unei molecule pot fi reduşi la nucleele lor aflate în poziţii de echilibru, poziţii care pot fi determinate destul de precis folosind „fotografiile" cu radiaţii **X**. Un

Scanned with OKEN Scanner

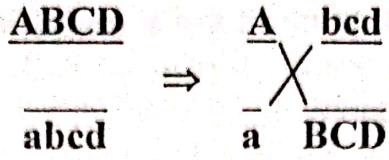
element de simetrie al unei molecule va fi o simetrie geometrică a sa care induce corespondenţe numai între atomi de acelaşi tip. În general, grupurile de acest tip sunt finite, excepţie făcând molecula de hidrogen H_2. De exemplu, pentru molecula de metan CH_4 atomii de hidrogen formează în spaţiu un tetraedru regulat având în centrul de simetrie atomul de carbon. Grupul de simetrie geometrică al moleculei de metan va conţine 4 rotaţii ale căror axe unesc fiecare din cei 4 atomi de hidrogen cu atomul de carbon, 3 rotaţii ale căror axe sunt bisectoarele unghiurilor cu vârfurile în **C** formate de cele 4 axe precedente şi 6 simetrii faţă de planele determinate de câte o pereche de axe din cele două tipuri (adică planele mediatoare ale celor 6 laturi ale tetraedrului). Aceste simetrii generează aşa-numitul grup punctual al moleculei. El este o măsură a simetriei moleculei şi este un invariant important pentru rezolvarea multor probleme din chimie. Structura grupurilor punctuale întâlnite mai frecvent a fost studiată complet.

Spre deosebire de simetria moleculară, simetria cristalelor este legată de simetria unui aranjament de molecule. Se demonstrează că există 32 grupuri punctuale de simetrie (distincte) la care aparţine grupul punctual asociat oricărui cristal. La acestea corespund 230 de grupuri spaţiale neechivalente ortogonal, dintre care doar 73 sunt izomorfe.

Aplicaţie în genetică

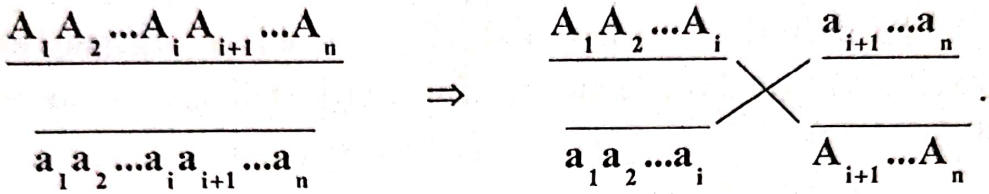
Se ştie că cromozomii sunt purtătorii genelor. Mai exact , în lungul fiecărui cromozom se găsesc dispuse gene, aşezate fiecare pe câte un locus, înlănţuite între ele şi formând aşa-numitele *grupaje ligaturale* . Doi cromozomi care au acelaşi număr de gene şi având pe locusurile corespunzătoare forme alelice ale aceleiaşi gene se numesc *cromozomi omologi* . De exemplu, dacă pe un cromozom există grupajul ligatural **ABCD** pe un cromozom omolog vom avea grupajul ligatural **abcd** unde perechile **(a,A), (b,B), (c,C) (d,D)** sunt formate din forme alelice ale aceloraşi gene. Această înlănţuire nu este absolută (indestructibilă); ca urmare între perechile de gene de pe cromozomi omologi pot avea loc schimburi. În acest proces de încrucişare reciprocă se ajunge la o recombinare a elementelor ligaturale. De exemplu, prin recombinarea

Scanned with OKEN Scanner



din cromozomii omologi $\underline{ABCD}$ şi $\overline{abcd}$ se obţin cromozomii omologi **Abcd** şi **aBCD**.

Să considerăm că pe doi cromozomi omologi există câte **n** gene concatenate pe **n** loci şi să notăm cu $r_{i,1}$ recombinarea dintre locusul **i** şi locusul **i +1**, adică recombinarea



Vom nota cu $r_{i,0}$ lipsa recombinării între locusurile **i** şi **i+1**. Au loc relaţiile evidente

$$r_{i,o} = r_{i,1} \circ r_{i,1}\,, \quad r_{i,1} = r_{i,1} \circ r_{i,0} = r_{i,o} \circ r_{i,1}\,, \quad \forall i = 1,2,..,n-1\ .$$

Evident, există recombinările $r_{1,0}$, $r_{1,1}$, $r_{2,0}$, $r_{2,1}$,..., $r_{n-1,0}$, $r_{n-1,1}$ care generează un grup cu 2^n elemente r_k ($0 \le k \le 2^n-1$) . În cazul $n = 3$ se obţin elementele

$$r_o = r_{1,o}r_{2,o}r_{3,o} \qquad r_3 = r_{1,o}r_{2,o}r_{3,1} \qquad r_6 = r_{1,o}r_{2,1}r_{3,1}$$
$$r_1 = r_{1,1}r_{2,o}r_{3,o} \qquad r_4 = r_{1,1}r_{2,1}r_{3,o} \qquad r_7 = r_{1,1}r_{2,1}r_{3,1}$$
$$r_2 = r_{1,o}r_{2,1}r_{3,o} \qquad r_5 = r_{1,1}r_{2,o}r_{3,1}$$

Definiţia 9. O mulţime nevidă **I** dotată cu două legi de compoziţie, una notată aditiv (+) şi numită adunare iar cealaltă notată multiplicativ (·) şi numită înmulţire se numeşte *inel* dacă: I_1. **I(+)** este grup comutativ, I_2. **I(·)** este monoid, I_3. înmulţirea este distributivă faţă de adunare. Dacă în plus înmulţirea este comutativă inelul se numeşte *inel comutativ*.

Exemplul 5. 1°. **Z(+,·)** este inel comutativ. 2°. Mulţimea $M_n(\mathbb{R})(+,\cdot)$ este inel (necomutativ).

Elementele lui **I** simetrizabile în raport cu înmulţirea se numesc *elemente inversabile* sau *unităţi*. Unităţile inelului **Z(+,·)** sunt **-1** şi **+1**.

Definiţia 10. 1. Spunem că inelul **I(+,·)** este inel fără *divizori ai lui* **0** dacă $x \neq 0$ şi $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$. 2. Dacă există $x \neq 0$ şi $y \neq 0$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încât $x \cdot y = 0$, se spune că **x** şi **y** sunt *divizori ai lui* **0**; se mai spune totodată şi că inelul **I** *are divizori ai lui* **0. 3.** Un inel care are cel puţin două elemente, este comutativ şi este fără divizori ai lui **0** se numeşte *domeniu de integritate*; un inel fără divizori ai lui **0** se numeşte *inel integru.*

Exemplul 6. 1°. $\mathbf{Z}(+,\cdot)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero, adică este domeniu de integritate. 4°. Mulţimea $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})(+, \cdot)$ este inel (necomutativ) cu divizori ai lui zero . 5°. Mulţimea $\mathscr{P}(\mathbf{M})(\Delta, \cap)$ este inel comutativ cu element unitate.

Exerciţiul 12. Arătaţi că $\mathbf{R}_n(\oplus, \odot)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero când n este număr prim şi inel cu divizori ai lui zero dacă **n** nu este prim.

Exerciţiul 13. Daţi alte exemple de domenii de integritate.

Exerciţiul 14. Enumeraţi regulile de lucru într-un inel.

Definiţia 11. Un inel $\mathbf{K}(+, \cdot)$ pentru care $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ şi având proprietatea că orice element $\neq \mathbf{0}$ este inversabil se numeşte *corp*. Orice corp comutativ se numeşte *câmp*.

Exerciţiul 15. 1°.Verificaţi că $\mathbf{R}_5(\oplus, \odot)$ este câmp.

2°.Mulţimea $\mathbf{K} = \{0, 1, a, b\}$ dotată cu operaţiile "+" şi " · " date prin tablele Cayley de mai jos este câmp.

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Scanned with OKEN Scanner

§4. Pătrate latine

Fie **M** o mulţime cu **n** elemente.

Definiţia 12. 1. Un tablou **L** format din **n** linii şi **n** coloane cu elemente din **M** se numeşte *pătrat latin peste* **M** dacă fiecare element din **M** apare în **L** o dată şi numai o singură dată în fiecare linie şi în fiecare coloană. Se obişnuieşte ca elementele lui **M** să se numească *elementele pătratului latin* **L**. 2. Două pătrate latine de ordinul **n** se numesc *ortogonale* dacă prin suprapunere fiecare element al primului pătrat se cuplează o dată şi numai o singură dată cu fiecare element al celuilalt pătrat latin

Exemplul 7. Tabla Cayley a oricărui cvasigrup , loop sau grup , de ordin **n** , **G (*)** este un pătrat latin de ordinul **n** peste **G.**

Exerciţiul 16. Descrieţi o metodă de construcţie de pătrate latine ortogonale. Consultaţi eventual [1] pag. 82.

Exemplul 8. Vom considera câmpul **K(+, ·)** din Exerciţiul 15. Vom construi pe baza Teoremei 2, [1], pag.82, pătratele latine corespunzătoare lui **u=a** şi **u=b** şi vom arăta că sunt ortogonale. Pentru a aplica formula din teoremă redenumim elementele lui **K** şi anume: $0=x_0$, $1=x_1$, $a=x_2$, $b=x_3$. Pentru **u=a** avem

$$x^a_{00}=a\cdot x_0+x_0=0 \quad x^a_{10}=a\cdot x_1+x_0=a \quad x^a_{20}=a\cdot x_2+x_0=b \quad x^a_{30}=a\cdot x_3+x_0=1$$
$$x^a_{01}=a\cdot x_0+x_1=1 \quad x^a_{11}=a\cdot x_1+x_1=b \quad x^a_{21}=a\cdot x_2+x_1=a \quad x^a_{31}=a\cdot x_3+x_1=0$$
$$x^a_{02}=a\cdot x_0+x_2=a \quad x^a_{12}=a\cdot x_1+x_2=0 \quad x^a_{22}=a\cdot x_2+x_2=1 \quad x^a_{32}=a\cdot x_3+x_2=b$$
$$x^a_{03}=a\cdot x_0+x_3=b \quad x^a_{13}=a\cdot x_1+x_3=1 \quad x^a_{23}=a\cdot x_2+x_3=0 \quad x^a_{33}=a\cdot x_3+x_3=a$$

S-a obţinut pătratul latin L_a

0	1	a	b
a	b	0	1
b	a	1	0
1	0	b	a

În mod asemănător se obţine pătratul latin L_b. Într-adevăr pentru **u=b** avem

Scanned with OKEN Scanner

$$x^b_{00}=b\cdot x_0+x_0=0 \quad x^b_{10}=b\cdot x_1+x_0=b \quad x^b_{20}=b\cdot x_2+x_0=1 \quad x^b_{30}=b\cdot x_3+x_0=a$$
$$x^b_{01}=b\cdot x_0+x_1=1 \quad x^b_{11}=b\cdot x_1+x_1=a \quad x^b_{21}=b\cdot x_2+x_1=0 \quad x^b_{31}=b\cdot x_3+x_1=b$$
$$x^b_{02}=b\cdot x_0+x_2=a \quad x^b_{12}=b\cdot x_1+x_2=1 \quad x^b_{22}=b\cdot x_2+x_2=b \quad x^b_{32}=b\cdot x_3+x_2=0$$
$$x^b_{03}=b\cdot x_0+x_3=b \quad x^b_{13}=b\cdot x_1+x_3=0 \quad x^b_{23}=b\cdot x_2+x_3=a \quad x^b_{33}=b\cdot x_3+x_3=1$$

Obținem deci pătratul latin L_b

1	0	a	b
b	a	1	0
1	0	b	a
a	b	0	1

Pentru a verifica ortogonalitatea celor două pătrate latine vom identifica elementele **0, 1, a, b** respectiv cu **A, B, C, D** în L_a şi cu **α, β, γ, δ** în L_b. Tabelele astfel transformate le suprapunem pentru a constata ortogonalitatea.

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

α	β	γ	δ
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ
γ	δ	α	β

Aα	Bβ	Cγ	Dδ
Cδ	Dγ	Aβ	Bα
Dβ	Cα	Bδ	Aγ
Bγ	Aδ	Dα	Cβ

Exercițiul 12. Folosind tablele Cayley din Exercițiul 15.1°, construiți pătratele latine L_1, L_2, L_3, L_4 corespunzătoare elementelor din R_5 şi verificați că sunt ortogonale două câte două.

Aplicații ale pătratelor latine

1. Să considerăm experiența care constă în administrarea a trei rații diferite la vaci în lactație. Deoarece curba de lactație variază mult de la o vacă la alta este greu să se alcătuiască loturi omogene şi de aceea se obişnuieşte ca cele trei rații **A, B, C** să se experimenteze pe acelaşi animal în trei perioade succesive. Se aleg deci, prin tragere la sorți, trei vaci V_1, V_2, V_3. Având în vedere că ordinea de administrare a rațiilor are influență asupra efectelor acestor rații, rațiile se vor administra astfel încât să se elimine aceste influențe. Acest lucru se realizează administrând fiecare rație la câte o singură vacă într-o anumită perioadă, perioadele fiind separate de intervale de timp suficient de mari astfel încât să se elimine influența ordinii administrării celor trei rații. Cum fiecare vacă trebuie să folosească fiecare dintre rații se ajunge la o planificare de tipul

Scanned with OKEN Scanner

următor, care a condus la un pătrat latin **L** peste mulţimea **M = {A, B, C}**.

L

	V_1	V_2	V_3
perioada I	**A**	**B**	**C**
perioada II	**B**	**C**	**A**
perioada III	**C**	**A**	**B**

2. O staţiune de cercetări agricole îşi propune să compare productivitatea a patru hibrizi de porumb **A, B, C, D.** Staţiunea are la dispoziţie un teren de forma unui pătrat. Se pune problema să se organizeze experimentul de aşa manieră încât să se obţină o reducere la maxim a erorilor care pot fi introduse de variaţiile de fertilitate ale solului. În acest scop se împarte terenul în **16** parcele de arii egale şi se cultivă apoi în fiecare parcelă câte unul dintre hibrizii de porumb astfel încât, fiecare hibrid să fie cultivat o dată şi numai o singură dată în fiecare linie şi în fiecare coloană de parcele. Să ne reamintim că în tabla Cayley a oricărui cvasigrup (sau grup) finit fiecare element apare o singură dată pe fiecare linie şi pe fiecare coloană. Deci se poate considera că mulţimea **M = {A, B, C, D}** este organizată cu o structură de cvasigrup cu patru elemente. Astfel de cvasigrupuri există (vezi Exemplul 9.2°) deci problema are soluţie. Folosind corespondenţa **a ↔ A, b ↔ B, c ↔ C, d ↔ D** şi prima tablă de înmulţire din Exemplul 9.2° se obţine un pătrat latin care dă posibilitatea planificării experimentului şi pe care-l vom nota cu L_1. Evident, schimbând corespondenţa dintre elementele cvasigrupului şi hibrizi se obţin alte variante de planificare a experimentului.

L_1

B	**A**	**D**	**C**
C	**B**	**A**	**D**
A	**D**	**C**	**B**
D	**C**	**B**	**A**

Să presupunem acum că trebuie testată şi eficienţa a patru erbicide **a, b, c, d.** Este firesc să cuplăm fiecare erbicid cu fiecare hibrid o singură dată . Rezultă că fiecare erbicid va fi folosit câte o singură dată pe fiecare linie şi fiecare coloană de parcele, adică erbicidele vor conduce şi ele la un pătrat latin L_2. Condiţia ca fiecare erbicid să fie cuplat cu fiecare hibrid o

Scanned with OKEN Scanner

singură dată revine la faptul că pătratele latine L_1 şi L_2 sunt ortogonale . Deoarece există pătrate latine ortogonale (vezi Exemplul 18) rezultă că este posibil să planificăm experimentul în aşa fel încât să testăm simultan şi productivitatea hibrizilor şi eficienţa erbicidelor (luăm de exemplu ca pătrate latine L_1 şi L_2 exact pătratele latine de acelaşi nume din Exemplul 18).

Remarca 4. Ţinând cont că în fiecare din cele două experimente de mai sus timpul de realizare necesar este mare, iar efectuarea lor independentă ar necesita un timp dublu, rezultă marele avantaj al utilizării pătratelor latine ortogonale. Totodată atragem atenţia că nu există pătrate latine ortogonale de ordinul **6** (fapt demonstrat în anul 1899). Deci utilizarea pătratelor latine impune anumite restricţii . S-a demonstrat că numai pătratele latine de dimensiune $\mathbf{p^n}$, cu **p** - număr prim, pot avea pătrate ortogonale.

Remarca 5. Pătratele latine permit controlul a doi factori de variaţie şi aduc cea mai mare cantitate de informaţii cu cea mai mică cantitate de material experimental

Remarca 6. Iniţial, pătratele latine au fost folosite în cercetările din agricultură pentru a elimina variaţiile care rezultă din diferenţele de fertilitate ale solului în două direcţii. Apoi s-au folosit în planificarea experimentelor din zootehnie. În special, pătratele latine au fost folosite în experienţele pe vaci de lapte, deoarece permite compararea tratamentelor pe acelaşi animal, eliminând totodată diferenţele dintre vaci (manifestate la nivelul erorii de experiment) în ceea ce priveşte nivelul producţiei şi forma curbei de lactaţie. S-au putut compara în acest fel şi efectele a două (sau mai multe) raţii asupra producţiei de lapte la vaci. În anul 1889, Babcock a folosit pătrate latine pentru a studia dacă sunt sau nu diferenţe între cantitatea de lapte produsă de cele patru sferturi ale ugerului la vacă. S-au folosit pătratele latine şi pentru a se evidenţia efectul administrării fier-dextranului asupra cantităţii de hemoglobină la înţărcare, la purcei în vârstă de **2 - 10** zile.

În general se pot folosi pătrate latine pentru compararea efectelor a două sau mai multe tratamente.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

SPAȚII VECTORIALE

Se ştie că rezolvarea multor probleme din toate domeniile de activitate se reduce în final la rezolvarea unor sisteme de ecuaţii liniare (de exemplu, orice ajustare polinomială utilizată în legătură cu orice experiment din biologie revine la rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare) sau la determinarea vectorilor şi valorilor proprii ale unor operatori (de exemplu, determinarea funcţiilor de undă asociate unui sistem de microparticule se reduce la determinarea de vectori şi valori proprii). În fapt, se ajunge la transpunerea unor probleme concrete în cadrul algebrei liniare.

Unul dintre obiectele de bază ale algebrei liniare este *spaţiul vectorial* sau *spaţiul liniar*. Ca exemple citãm: spaţiile vectoriale ale vectorilor liberi din plan sau din spaţiu şi spaţiile vectoriale ale componentelor atomice şi moleculare.

§1. Spaţii vectoriale

1. Definiţii. Exemple

Definiţia 1. Fie **K** un câmp. Se numeşte *spaţiu vectorial* sau *spaţiu liniar* peste câmpul **K** orice mulţime nevidă **V** dotată cu o operaţie binară $+: V \times V \to V$, $(\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} + \vec{v}$ numită *adunare* şi o aplicaţie $\cdot: K \times V \to V$, $(\alpha, \vec{u}) \to \alpha \cdot \vec{u}$, numită *operaţie externă* (sau *lege de compoziţie externă*) care satisfac axiomele:

1°. **V**(+) este grup abelian,

2°. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$, $\forall\ \vec{v} \in V$ (1 este elementul neutru la înmulţirea din **K**),

3°. $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$, $\forall \alpha \in K$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$,

4°. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \vec{u} \in V$,

5°. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \vec{u} \in V$.

Scanned with OKEN Scanner

Terminologie. 1°. Elementele lui **V** se numesc *vectori* iar operaţia de adunare se numeşte *adunarea vectorilor*. Din motive didactice preferăm să notăm (mai greoi) vectorii prin litere având o săgeată deasupra ; aceasta permite să-i distingem uşor de elementele din câmpul **K**. 2°. Elementele lui **K** se numesc *scalari* iar operaţia externă se numeşte *înmulţire cu scalari*. 3°. Când $\mathbf{K}=\mathbb{R}$, **V** se numeşte *spaţiu vectorial real*, iar când $\mathbf{K}=\mathbb{C}$, **V** se numeşte *spaţiu vectorial complex*. 4°. Elementul neutru pentru adunare se numeşte *vectorul zero* şi se notează cu $\vec{0}$; mai târziu vom nota şi vectorul zero cu **0** (la fel ca scalarul zero) pentru că, din context, va fi totdeauna clar când este vorba de vectorul zero sau de scalarul zero. 5°. Opusul $\vec{v}'$ al vectorului $\vec{v}$ şi se va nota cu $\vec{v}'=-\vec{v}$.

Pentru comoditate vom nota $\vec{\alpha}\vec{u}=\alpha\cdot\vec{u}$.

Exemplul 1. 1°. Spaţiul vectorial peste câmpul **K** definit pe grupul abelian {0} dotat cu înmulţirea cu scalari definită prin $\alpha\cdot 0=0$, $\forall\ \alpha\in\mathbf{K}$ se numeşte *spaţiul vectorial nul*.

2°. Mulţimea $\mathbb{R}^2$ dotată cu operaţiile:

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),\quad \alpha\cdot(x_1,x_2)=(\alpha\cdot x_1,\alpha\cdot x_2)$$

este spaţiu vectorial real Într-adevăr, dacă

$\vec{x}=(x_1,x_2)$, $\vec{y}=(y_1,y_2)$, $\vec{z}=(z_1,z_2)$ sunt trei vectori oarecare din $\mathbb{R}^2$, egalităţile

$$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=((x_1,x_2)+(y_1,y_2))+(z_1,z_2)=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2),$$

$$\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(x_1,x_2)+((y_1,y_2)+(z_1,z_2))=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2)$$

asigură că adunarea este operaţie asociativă. Vectorul **(0, 0)** este element neutru la adunare iar vectorul $(-x_1, -x_2)$ este opusul vectorului (x_1, x_2). Comutativitatea adunării este uşor de verificat.

Exerciţiul 1. 1°.Arătaţi că adunarea matricelor şi înmulţirea matricelor cu scalari organizează mulţimea $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ca spaţiu vectorial real.

2°. Arătaţi că mulţimea V_3 a vectorilor liberi din spaţiu, dotată cu operaţiile obişnuite de adunare (definită, de exemplu, prin *regula paralelogramului*) şi înmulţire cu scalari, este spaţiu vectorial real .

Exerciţiul 2. Enumeraţi regulile de calcul dintr-un spaţiu vectorial:

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2. Spunem că sistemul de vectori $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m\}$ este un sistem *liniar independent*, sau că vectorii $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m$ sunt *liniar independenți* (sau că vectorii $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m$ formează un sistem *liniar independent*), dacă orice relație de forma $\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + ... + \mu_m \vec{v}_m = 0$ implică $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_m = 0$. În caz contrar se va spune că vectorii (sau sistemul de vectori) sunt *liniar dependenți*. Dacă orice vector din **V** este combinație liniară a vectorilor sistemului **S** spunem că **S** este un *sistem de generatori* pentru spațiul vectorial **V**.

Exemplul 2. Vectorii $\vec{v}_1 = (1,-2), \vec{v}_2 = (-1,1) \in \mathbb{R}^2$ sunt liniar independenți deoarece orice relație $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = (0,0)$, este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ -2\mu_1 + \mu_2 = 0 \end{cases}$ care are numai soluția $\mu_1=\mu_2=0$. Dar sistemul de vectori $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^2$, cu $\vec{v}_1 = (1,-2)$, $\vec{v}_2 = (-1,1), \vec{v}_3 = (1,0)$ este liniar dependent pentru că $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$. Sistemul de vectori $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$ pentru că orice vector $\vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ se poate scrie $\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$ unde $\mu_1=-\alpha_1-\alpha_2$, $\mu_2=-2\alpha_1-\alpha_2$.

Definiția 3. Sistemul de vectori **S** se numește *bază* a spațiului vectorial **V** dacă

1°. **S** este un sistem liniar independent,

2°. **S** este un sistem de generatori pentru **V**.

Exemplul 3. 1.Pe baza Exemplului 2 rezultă că $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ este bază în $\mathbb{R}^2$.

2. Sistemul de vectori $B_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ cu $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ este bază în $\mathbb{R}^2$. Într-adevăr, egalitatea $\mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 = (\mu_1, \mu_2)$ implică

$$\mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 = (0,0) \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0 \text{ și } \vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$$

adică B_c este și sistem liniar independent și sistem de generatori în $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1 (de caracterizare a bazei). Sistemul de vectori $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ este bază a spațiului vectorial **V** dacă și numai dacă orice vector $\vec{v} \in V$ se scrie în mod **unic** sub forma

$$\vec{v} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + ... + \mu_n \vec{e}_n \text{ cu } \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in K.$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiție 4. Dacă $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ este bază în V și $\vec{v}$ este un vector oarecare din V atunci scalarii $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in K$, unic determinați de reprezentarea

$$\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + ... + \mu_n \vec{v}_n ,$$

se numesc *coordonatele vectorului* $\vec{v}$ *în baza* B.

Exemplul 4. Dacă $B_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^2$ pentru orice vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ au loc egalitățile $\vec{v} = (x_1, x_2) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, adică componentele x_1, x_2 sunt chiar coordonatele de același nume ale vectorului $\vec{v}$. Teorema 1 asigură că baza B_c este singura bază cu această proprietate și de aceea poartă numele de *bază canonică* sau *bază naturală* din $\mathbb{R}^2$.

Exercițiul 3. Definiți baza canonică $B_c = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ din $\mathbb{R}^n$ și arătați că au loc egalitățile $\vec{v} = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$.

Rezultă că orice vector din $\mathbb{R}^n$ are *i*-componenta **(i = 1, 2,..., n)** egală cu *i*-coordonata în baza canonică B_c din $\mathbb{R}^n$. Această bază este singura bază cu această proprietate și de aceea această bază se numește *baza canonică* sau *baza naturală* din $\mathbb{R}^n$.

Exercițiul 4. Arătați că în spațiul vectorial real E_3 al vectorilor liberi din spațiu, orice sistem format din trei vectori (nenuli) necoplanari este o bază pentru E_3.

Proprietățile sistemelor de vectori liniar dependenți

1°. un sistem de vectori este liniar dependent dacă și numai dacă unul dintre vectorii sistemului este combinație liniară a celorlalți ,

2°. dacă un subsistem S' al unui sistem de vectori S este liniar dependent, atunci S este liniar dependent ,

3°. orice sistem de vectori care conține vectorul $\vec{0}$ este liniar dependent ,

4°. dacă un vector dintr-un sistem de generatori pentru spațiul vectorial V este combinație liniară a celorlalți vectori ai sistemului atunci, eliminându-l din sistem, se obține tot un sistem de generatori pentru V.

Pe baza proprietății 4° se demonstrează următorul rezultat.

Teorema 2. Din orice sistem de generatori al unui spațiu vectorial V se poate extrage o bază a acestui spațiu .

Scanned with OKEN Scanner

2. Lema substituției

Instrumentul de lucru care se poate utiliza în rezolvarea majorității problemelor de algebră liniară este așa-numita *lema substituției* pe care o prezentăm în cele ce urmează.

Lema substituției. Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ o bază a spațiului vectorial V, $\vec{u} \in V$ - un vector fix cu $\vec{u} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n$ și sistemul de vectori $B^* = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_{i-1}, \vec{u}, \vec{e}_{i+1}, ..., \vec{e}_n\}$ obținut din B înlocuind vectorul $\vec{e}_i$ cu vectorul $\vec{u}$. Au loc afirmațiile :

1°. B^* este bază dacă și numai dacă $\alpha_i \neq 0$,

2°. dacă B^* este bază a lui V, atunci coordonatele $\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_n^*$ în baza B^* ale unui vector $\vec{x} \in V$ se exprimă în funcție de coordonatele $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ în baza B ale lui $\vec{x}$ prin egalitățile

$$\lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{\alpha_i}, \quad \lambda_j^* = \lambda_j - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\cdot\lambda_i \quad \text{pentru } j \neq i.$$

Calculele care trebuiesc făcute pentru a determina coordonatele în baza B^* ale vectorilor $\vec{u}, \vec{x}$ când se cunosc coordonatele acestora în baza B se organizează sub forma tablourilor:

B	... $\vec{u}$ ... $\vec{x}$ ...
$\vec{e}_1$	α_1 λ_1
.	. .
.	. .
$\vec{e}_i$	$\boxed{\alpha_i}$ λ_i
.	. .
.	. .
$\vec{e}_j$	α_j λ_j
.	. .
.	. .
$\vec{e}_n$	α_n λ_n

$\Rightarrow$

B^*	... $\vec{u}$ .... $\vec{x}$ ...
$\vec{e}_1$	0 $\lambda_1 - (\lambda_i / \alpha_i)\alpha_1$
.	. .
.	. .
$\vec{e}_i$	1 λ_i / α_i
.	. .
.	. .
$\vec{e}_j$	0 $\lambda_j - (\lambda_i / \alpha_i)\alpha_j$
.	. .
.	. .
$\vec{e}_n$	0 $\lambda_n - (\lambda_i / \alpha_i)\alpha_n$

În aceste tablouri, pe coloane se trec coordonatele vectorilor corespunzători în bazele indicate la începutul fiecărui tablou. Deoarece s-a presupus că $\alpha_i \neq 0$ rezultă că putem înlocui $\vec{e}_i$ cu $\vec{u}$. Elementul α_i se va numi *pivot* ca o recunoaștere a rolului important pe care îl are de

Scanned with OKEN Scanner

jucat. De obicei pivotul se marchează punându-se într-un dreptunghi sau într-un cerculeţ (fie va fi scris cu caractere mai îngroşate decât restul textului).

Trecerea de la tabloul **B** la tabloul $\mathbf{B}^*$ se face în felul următor :

1°. *elementele liniei din* **B*** *corespunzătoare liniei pivotului se obţin împărţind la pivot toate elementele liniei pivotului,*

2°. *se completează coloana corespunzătoare pivotului cu* **0***-uri,*

3°. *toate elementele* λ_j *cu* $j \neq i$ *se înlocuiesc cu* $\lambda_j^* = \lambda_j - \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \cdot \alpha_j$.

Trecerea de la λ_j la λ_j^* se poate face formal pe baza următoarei reguli cunoscută sub numele de *regula dreptunghiului* şi prezentată schematic în desenul de mai jos:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\alpha_i} & \text{----} & \lambda_i \\ | & & | \\ \alpha_j & \text{----} & \lambda_j \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 1 & \text{----} & \lambda_i / \alpha_i \\ | & & | \\ 0 & \text{----} & \lambda_j - \frac{\lambda_i}{\alpha_i}\alpha_j \end{array}$$

Exerciţiul 5. Cum se poate folosi lema substituţiei pentru a arăta că un sistem de vectori este o bază? Verificaţi-vă pe baza manualului [1] pag.95.

Exemplul 5. Vom verifica faptul că sistemul de vectori $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \subset \mathbb{R}^3$ unde $\vec{v}_1 = (2,3,-1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,1)$, $\vec{v}_3 = (1,-1,2)$ este o bază în $\mathbb{R}^3$ şi vom determina coordonatele vectorului $\vec{v} = (4, 3, 0)$ în baza S. Construim tabelele următoare

B_c	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}$
$\vec{e}_1$	2	**1**	1	4
$\vec{e}_2$	2	0	-1	3
$\vec{e}_3$	-1	1	2	0

B_1	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}$
$\vec{v}_2$	2	1	1	4
$\vec{e}_2$	2	0	-1	3
$\vec{e}_3$	-3	0	**1**	-4

Scanned with OKEN Scanner

B_2	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}$
$\vec{v}_2$	5	1	0	8
$\vec{e}_2$	[-1]	0	0	-1
$\vec{v}_3$	-3	0	1	-4

B_3	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}$
$\vec{v}_2$	0	1	0	3
$\vec{v}_1$	1	0	0	1
$\vec{v}_3$	0	0	1	-1

că sistemul S este bază şi că

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3,$$

adică **1, 3, -1** sunt coordonatele lui $\vec{v}$ în baza **S**.

Exercițiul 6. Rezolvați problema din Exemplul 5 pornind în primul tablou de la pivotul din locul (3,2) şi utilizând indicațiile din [1] pag.96, Remarca 3.

Exemplul 6. Vom stabili că sistemul de vectori $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$, unde

$\vec{v}_1 = (2,3,1,0)$, $\vec{v}_2 = (1,0,1,-1)$, $\vec{v}_3 = (1,-1,2,-1)$, $\vec{v}_4 = (6,7,-1,0)$,

este liniar dependent şi vom determina o relație de dependență liniară între vectorii sistemului.

B_c	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$
$\vec{e}_1$	2	1	1	6
$\vec{e}_2$	3	0	-1	7
$\vec{e}_3$	-1	1	2	-1
$\vec{e}_4$	0	[-1]	-1	0

B_1	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$
$\vec{e}_1$	2	0	0	6
$\vec{e}_2$	3	0	-1	7
$\vec{e}_3$	-1	0	[1]	-1
$\vec{v}_2$	0	1	1	0

B_2	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$
$\vec{e}_1$	2	0	0	6
$\vec{e}_2$	[2]	0	0	6
$\vec{v}_3$	-1	0	1	-1
$\vec{v}_2$	1	1	0	1

B_3	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$
$\vec{e}_1$	0	0	0	0
$\vec{v}_1$	1	0	0	3
$\vec{v}_3$	0	0	1	-1
$\vec{v}_2$	0	1	0	1

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul nu este independent deoarece $\vec{v}_4$ nu poate fi introdus în bază. Din ultima coloană rezultă $\vec{v}_4 = 3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$, adică $3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 - \vec{v}_4 = 0$ este o relație de dependență liniară între vectorii sistemului.

Exercițiul 7. Arătați că între vectorii sistemului $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} \subset \mathbb{R}^5$ unde
$\vec{v}_1 = (2,3,-1,0,2)$, $\vec{v}_2 = (1,-1,2,-1,-1)$, $\vec{v}_3 = (1,2,-1,0,-2)$, $\vec{v}_4 = (-2,-9,7,-2,0)$
există o relație de dependență liniară. Care este numărul maxim de vectori liniar independenți din sistem?

Teorema 3 (a bazei). Dacă V are o bază $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ atunci

1°. orice sistem liniar independent din V are cel mult **n** vectori,

2°. orice bază a lui V are **n** vectori.

Definiție 5. Spunem că spațiul vectorial V peste câmpul K are dimensiunea **n** peste K și scriem $\mathbf{n} = \dim_K V$ dacă în V există o bază formată din **n** vectori.

Teorema 4. Orice sistem de $\mathbf{r} < \mathbf{n}$ vectori liniar independenți dintr-un spațiu vectorial V se poate completa până la o bază.

Exemplul 7. Vom arăta că vectorii $\vec{v}_1 = (-1,2,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,-3,1,-2) \in \mathbb{R}^4$ sunt liniar independenți și vom completa sistemul $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ până la o bază din $\mathbb{R}^4$. Pe baza tabelelor

B_c	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$
$\vec{e}_1$	-1	1
$\vec{e}_2$	2	-3
$\vec{e}_3$	0	[1]
$\vec{e}_4$	1	-2

B_1	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$
$\vec{e}_1$	-1	0
$\vec{e}_2$	2	0
$\vec{v}_2$	0	[1]
$\vec{e}_4$	[1]	0

B_2	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$
$\vec{e}_1$	0	0
$\vec{e}_2$	0	0
$\vec{v}_2$	0	1
$\vec{v}_1$	[1]	0

Se constată că B_2 este o bază ce conține sistemul S.

Tot pe baza lemei substituției se stabilește rezultatul:

Teorema 5. Fie V un spațiu vectorial de dimensiune **n** peste câmpul K. Pentru orice sistem de **n** vectori $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ următoarele afirmații sunt echivalente :

1°. S este bază pentru V,

Scanned with OKEN Scanner

2°. S este un sistem de generatori pentru V,
3°. S este un sistem liniar independent .

Exercițiul 8. Folosind Teorema 5, verificați că sistemul de vectori $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}\subset\mathbb{R}^3$ unde $\vec{v}_1=(1,2,-1)$, $\vec{v}_2=(0,3,1)$, $\vec{v}_3=(2,0,-3)$ este o bază în $\mathbb{R}^3$.

§2. Subspații vectoriale

1°. Definiție. Exemple

Fie V un spațiu vectorial peste câmpul K.

Definiția 6. O submulțime nevidă $L\subset V$ se numește *subspațiu vectorial* al lui V dacă operațiile din V induc pe L o structură de spațiu vectorial.

Propoziția 1. Submulțimea nevidă L a spațiului vectorial V este subspațiu vectorial dacă şi numai dacă :

1°. $\forall\vec{x},\ \vec{y}\in L \Rightarrow \vec{x}+\vec{y}\in L$

2°. $\forall\alpha\in K,\forall\vec{x}\in L \Rightarrow \alpha\cdot\vec{x}\in L$.

Exemplul 8. 1°. Mulțimea

$$L=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\begin{array}{c}2x_1+3x_2=0\\ x_1+2x_2-5x_3=0\end{array}\right\}$$

a tuturor soluțiilor sistemului liniar şi omogen $\begin{cases}2x_1+3x_2=0\\ x_1+2x_2-5x_3=0\end{cases}$ este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. Într-adevăr, dacă $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $(\beta_1,\beta_2,,\beta_3)\in L$, adică

$$\begin{cases}2\alpha_1+3\alpha_2=0\\ \alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3=0\end{cases}\quad\text{şi}\quad\begin{cases}2\beta_1+3\beta_2=0\\ \beta_1+2\beta_2-5\beta_3=0\end{cases}$$

atunci, adunând aceste relații, rezultă că $(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \alpha_3+\beta_3)$ satisfac condițiile

$$\begin{cases}2(\alpha_1+\beta_1)+3(\alpha_2+\beta_2)=0\\ (\alpha_1+\beta_1)+2(\alpha_2+\beta_2)-5(\alpha_3+\beta_3)=0\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

adică $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3) \in L$. Înmulțind cu λ relațiile pe care le satisface vectorul $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ rezultă că $\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3) \in L$, deci L este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. Se constată că orice element $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in L$ este de forma $\vec{v} = (15,-10,-1)\cdot t, t \in \mathbb{R}$, adică $\vec{v}_0 = (15,-10,-1)$ este o bază pentru L.

Exercițiul 9. Arătați că $L = \{X \in R^n \mid AX = 0\}$, unde A este o matrice reală de tip m×n iar elementele lui $\mathbb{R}^n$ sunt identificate cu matrice coloană, este subspațiu liniar în $\mathbb{R}^n$.

Exemplul 9. Fie $L = \{\vec{v} \in R^3 \mid \exists \lambda, \mu \in R$ astfel încât $\vec{v} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2\}$, unde $\vec{v}_1 = (1, -1, 2, 1)$ şi $\vec{v}_2 = (2, 3, -1, 1)$. Dacă

$$\vec{v} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2,\ \vec{w} = \lambda_1\vec{v}_1 + \mu_1\vec{v}_2 \in L$$

atunci

$$\vec{v} + \vec{w} = (\lambda + \lambda_1)\vec{v}_1 + (\mu + \mu_1)\vec{v}_2 \in L \text{ şi } \alpha\vec{v} = (\alpha\lambda)\vec{v}_1 + (\alpha\mu)\vec{v}_2 \in L,$$

adică L este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. În acest caz componentele x, y, z, u ale unui vector oarecare $\vec{v} \in L$ au expresiile $x = \lambda + 2\mu$, $y = -\lambda + 3\mu$, $z = 2\lambda - \mu$, $u = \lambda + \mu$, cu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; aceste relații se numesc *ecuațiile parametrice* ale subspațiului deoarece componentele oricărui element din L se obțin din ele prin particularizarea parametrilor λ, μ. Eliminând λ, μ din aceste ecuații rezultă că $\vec{v} = (x, y, z, u) \in L$ dacă şi numai dacă $\vec{v} \in L'$ unde $L' = \left\{(x,y,z,u) \in R^4 \mid \begin{matrix} 4x - y - 5u = 0 \\ 3x + z - 5u = 0 \end{matrix}\right\}$ (adică L=L'). Din acest motiv, ecuațiile care compun sistemul de ecuații ce caracterizează L' se numesc şi ecuațiile subspațiului L. Deoarece $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ este liniar independent şi generează spațiul L rezultă că $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$.

Teorema 6. Dacă V este un spațiu vectorial finit dimensional, orice subspațiu vectorial al său va fi finit dimensional şi $\dim_K L \le \dim_K V$, egalitatea având loc dacă şi numai dacă L = V.

2°. Rangul unui sistem de vectori

Fie $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m\}$ un sistem de vectori din spațiul vectorial real V. Considerăm mulțimea notată $L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m)$ definită prin :

Scanned with OKEN Scanner

$L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_m)=\{\vec{v}\in V\,|\,\vec{v}=\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2+...+\mu_m\vec{v}_m,\ \mu_1,\mu_2,...,\mu_m\in K\}$
La fel ca în Exemplul 9 se arată că $L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_m)$ este subspațiu vectorial al lui V.

$L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_m)$ se numește *subspațiul liniar generat de sistemul de vectori* S.

Definiția 7. Se numește *rangul sistemului de vectori* $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_m\}$ numărul notat **rang S** egal prin definiție cu $\dim_K L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_m)$.

Se vede că rangul sistemului de vectori S este egal cu numărul maxim de vectori liniar independenți din sistem .

Exemplul 10. Să determinăm rangul sistemului de vectori $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4\}\subset\mathbb{R}^4$, unde $\vec{v}_1=(1,\ 2,\ -3,\ -5)$, $\vec{v}_2=(-1,\ 0,\ 2,\ 7)$, $\vec{v}_3=(1,\ 4,\ -4,\ -3)$, $\vec{v}_4=(-1,\ 2,\ 1,\ 9)$. Construim tabelele

B_c	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$
$\vec{e}_1$	1	**-1**	1	-1
$\vec{e}_2$	2	0	4	2
$\vec{e}_3$	-3	2	-4	1
$\vec{e}_4$	-5	7	-3	9

B_1	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$
$\vec{v}_2$	-1	1	-1	1
$\vec{e}_2$	2	0	4	2
$\vec{e}_3$	**-1**	0	-2	-1
$\vec{e}_4$	2	0	4	2

B_2	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$
$\vec{v}_2$	0	1	1	2
$\vec{e}_2$	0	0	0	0
$\vec{v}_1$	1	0	2	1
$\vec{e}_4$	0	0	0	0

Rezultă că **rang S=2.** În plus, din ultimul tabel rezultă că
$\vec{v}_3=2\vec{v}_1+\vec{v}_2,\ \vec{v}_4=\vec{v}_1+2\vec{v}_2$.

3°. Rangul unei matrice

Fiecărei matrice $A=\|a_{ij}\|_{m\times n}$ îi asociem vectorii coloană

Scanned with OKEN Scanner

$$C_1^A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \; C_2^A = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \; C_n^A = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

pe care îi identificăm cu elemente din $\mathbb{R}^m$ şi vectorii linie

$$L_1^A = [a_{11} \; a_{12} \; \ldots a_{1n}], \; L_2^A = [a_{21} \; a_{22} \; \ldots a_{2n}], \ldots,$$
$$L_m^A = [a_{m1} \; a_{m2} \; \ldots a_{mn}]$$

pe care îi identificăm în mod natural cu elemente din $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7 (Kronecker). Pentru orice matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ au loc egalităţile

$$rang\,\{C_1^A, C_2^A, \ldots, C_n^A\} = rang\,\{L_1^A, L_2^A, \ldots, L_m^A\} = rang\,A.$$

Această teoremă permite să calculăm rangul unei matrice cu ajutorul lemei substituţiei şi anume: este suficient să calculăm, conform Teoremei lui Kronecker, rangul sistemului de vectori coloană (linie).

Exemplul 11. Vom determina rangul matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vom utiliza sistemul de vectori coloană. Se obţin tabelele:

B_c	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A
$\vec{e}_1$	1	2	0	1	-1
$\vec{e}_2$	2	0	2	2	2
$\vec{e}_3$	3	2	2	3	1
$\vec{e}_4$	6	4	4	5	2

Scanned with OKEN Scanner

B_1	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A
$\bar{e}_1$	1	2	0	1	-1
C_3^A	1	0	1	1	1
$\bar{e}_3$	1	2	0	[1]	-1
$\bar{e}_4$	2	4	0	1	-2

B_2	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A
$\bar{e}_1$	0	0	0	0	0
C_3^A	0	-2	1	0	2
C_4^A	1	2	0	1	-1
$\bar{e}_4$	[1]	2	0	0	-1

B_3	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A
$\bar{e}_1$	0	0	0	0	0
C_3^A	0	-2	1	0	2
C_4^A	0	0	0	1	0
C_1^A	1	2	0	0	-1

Pe baza ultimului tabel putem spune că **rang A =3.**
Ca exercițiu vă propunem să determinați rangul matricei **A** folosind sistemul de vectori linie.

4°. Inversarea matricelor

Considerăm matricea pătratică inversabilă $A = \lfloor a_{ij} \rfloor \in M_n(\mathbb{R})$ a cărei inversă este matricea $A^{-1} = \lfloor b_{ij} \rfloor \in M_n(\mathbb{R})$. Existența inversei matricei **A** este echivalentă cu oricare dintre următoarele trei afirmații:

1°. **det A ≠ 0,**

2°. *rang* **A = n,**

3°. $\{C_1^A, C_2^A, ..., C_n^A\} \subset \mathbb{R}^n$ și $\{L_1^A, L_2^A, ..., L_n^A\} \subset \mathbb{R}^n$ sunt baze în $\mathbb{R}^n$.

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea concretă a inversei are la bază formula

$$C_j^{I_n} = C_1^A \cdot b_{1j} + C_1^A \cdot b_{2j} + \ldots + C_{nj}^A \cdot b_{nj} \ , \ j = 1,2,\ldots,n$$

care ne spune că elementele b_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ale coloanei j a matricei inverse sunt coordonatele vectorului $C_j^{I_n}$ în baza $\{C_1^A, C_2^A, \ldots, C_n^A\} \subset \mathbb{R}^n$.

Procedeul practic care decurge de aici este următorul: se construieşte primul tabel care conţine atât vectorii sistemului $\{C_1^A, C_2^A, \ldots, C_n^A\} \subset \mathbb{R}^n$ cât şi vectorii coloană ai matricei unitate de ordinul n după care se înlocuiesc pe rând, utilizând lema substituţiei, elementele bazei iniţiale cu vectorii sistemului $\{C_1^A, C_2^A, \ldots, C_n^A\} \subset \mathbb{R}^n$.

Exemplul 12. Vom determina inversa matricei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Construim tabelele:

B_c	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
e_1	1	1	1	1	1	0	0	0
e_2	-1	1	-1	1	0	1	0	0
e_3	1	-1	-1	1	0	0	1	0
e_4	-1	-1	1	1	0	0	0	1

B_1	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
C_1^A	1	1	1	1	1	0	0	0
e_2	0	2	0	2	1	1	0	0
e_3	0	-2	-2	0	-1	0	1	0
e_4	0	0	2	2	1	0	0	1

B_2	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
C_1^A	1	0	1	0	½	-½	0	0
C_2^A	0	1	0	1	½	½	0	0

Scanned with OKEN Scanner

e_3	0	0	-2	2	0	1	1	0
e_4	0	0	2	2	1	0	0	1

B_3	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
C_1^A	1	0	0	1	½	0	½	0
C_2^A	0	1	0	1	½	½	0	0
C_3^A	0	0	1	-1	0	-½	-½	0
e_4	0	0	0	4	1	1	1	1

B_4	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
C_1^A	1	0	0	0	¼	-¼	¼	-¼
C_2^A	0	1	0	0	¼	¼	-¼	-¼
C_3^A	0	0	1	0	¼	-¼	-¼	¼
C_4^A	0	0	0	1	¼	¼	¼	¼

Prin urmare, inversa matricei A este $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Exercițiul 8. Determinați inversa matricei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplul 13. Vom determina inversa matricei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Construim tabelele:

B_c	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
e_1	1	1	2	1	1	0	0	0
e_2	-1	1	3	2	0	1	0	0
e_3	3	4	1	1	0	0	1	0
e_4	2	3	2	-1	0	0	0	1

Scanned with OKEN Scanner

B_1	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
e_1	-2	-3	**1**	0	1	0	-1	0
e_2	-7	-7	1	0	0	1	-2	0
C_4^A	3	4	1	1	0	0	1	0
e_4	5	7	3	0	0	0	1	1

B_2	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
C_3^A	-2	-3	1	0	1	0	-1	0
e_2	-5	**-4**	0	0	-1	1	-1	0
C_4^A	5	7	0	1	-1	0	2	0
e_4	11	16	0	0	-3	0	4	1

B_3	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
C_3^A	7/4	0	1	0	7/4	-3/4	-1/4	0
C_2^A	5/4	1	0	0	1/4	-1/4	1/4	0
C_4^A	-15/4	0	0	1	-11/4	7/4	1/4	0
e_4	**-9**	0	0	0	-7	4	0	1

B_4	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	$C_1^{I_4}$	$C_2^{I_4}$	$C_3^{I_4}$	$C_4^{I_4}$
C_3^A	0	0	1	0	7/18	1/36	-1/4	7/36
C_2^A	0	1	0	0	-13/18	11/36	1/4	5/36
C_4^A	0	0	0	1	1/6	1/12	1/4	-5/12
C_1^A	1	0	0	0	7/9	-4/9	0	-1/9

Din ultimul tabel rezultă

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{13}{18} & \frac{11}{36} & \frac{1}{4} & \frac{5}{36} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{36} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exercițiul 9. Determinați inversa matricei $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercițiul 10. Completați tabelele următoare necesare determinării inversei matricei nesingulare $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ **(det A = -16).**

B_c	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_1	C_2	C_3
e_1	2	[-1]	3	1	0	0
e_2	3	-2	2	0	1	0
e_3	1	-4	0	0	0	1

B_1	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_1	C_2	C_3
C_2^A	-2	1	...	-1	0	0
e_2	[-1]	0	..	.....	..	0
e_3	-7	0	-12	...	0	..

B_2	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_1	C_2	C_3
C_2^A	0	1	..	3	...	0
C_1^A	1	0	..	..	...	0
e_3	0	0	[16]	...	-7	..

B_3	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_1	C_2	C_3
C_2^A	0	1	0	-1/8	.....	-5/16
C_1^A	1	0	0	.....	3/4	-1/4
C_3^A	0	0	1	...	-7/16	....

Scanned with OKEN Scanner

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & .... \end{bmatrix}$$

5°. Calculul determinanților

Dacă dorim să calculăm valoarea determinantului Δ al matricei pătratice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ construim tabelul

B_c	C_1^A	C_2^A	...	C_n^A
e_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
e_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
.	.....	.....	.....	.....
e_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

după care, utilizând lema substituției, vom înlocui numărul maxim posibil de vectori ai bazei canonice cu coloane ale matricei **A**; dacă acest număr este mai mic decât **n**, unele coloane ale matricei **A** vor fi combinații liniare ale celorlalte coloane şi deci $\Delta = \det A = 0$. În cazul în care toți vectorii bazei canonice se înlocuiesc cu coloanele matricei **A**, înseamnă că am trecut de la matricea dată fie la matricea unitate fie la o matrice obținută din aceasta printr-o permutare a coloanelor. Valoarea determinantului va fi $\Delta = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n (-1)^s$ unde **s** este numărul de schimbări de coloane necesare pentru a transforma matricea finală în matricea unitate.

Exemplul 14. Vom determina valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Construim tabelele

B_c	C_1	C_2	C_3	C_4
e_1	[1]	3	0	-2
e_2	-2	1	-2	3
e_3	0	-2	1	1
e_4	2	5	4	1

B_1	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	3	0	-2
e_2	0	7	-2	-1
e_3	0	-2	[1]	1
e_4	0	-1	4	5

B_2	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	3	0	-2
e_2	0	3	0	[1]
C_3	0	2	1	1
e_4	0	7	0	1

B_3	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	9	0	0
C_4	0	3	0	1
C_3	0	-1	1	0
e_4	0	[4]	0	0

B_4	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	0	0	0
C_4	0	0	0	1
C_3	0	0	1	0
C_2	0	1	0	0

Deoarece sunt necesare trei schimbări de coloane pentru a obține matricea unitate în locul ultimei matrice, rezultă că

$$\Delta=1\cdot1\cdot1\cdot4\cdot(-1)^3=-4\ .$$

6°. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Fie (S) un sistem de m ecuații cu necunoscutele $x_1, x_2,..., x_n$:

Scanned with OKEN Scanner

$$(S)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

unde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, sunt numere reale cunoscute iar $x_j \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le n$ sunt numere reale necunoscute. Folosind notațiile

$$A=[a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

sistemul (S) se poate pune sub forma

$$(S')\qquad A\cdot X = b\ .$$

Prin utilizarea coloanelor matricei A sistemul (S) capătă forma

$$(S'')\qquad C_1^A x_1 + C_2^A x_2 + \ldots + C_n^A x_n = b\ .$$

Exercițiul 11. Definiți noțiunea de soluție a unui sistem liniar. Ce semnificație are această noțiune pentru fiecare din cele trei tipuri de forme de prezentare a unui sistem liniar? Ce interpretare are noțiunea de soluție a sistemului (S")? Pentru verificare comparați cu [1] pag. 109.

Exemplul 15. Folosind interpretarea din Exercițiul 11 vom rezolva sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

În acest scop construim tablourile

B_c	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	b
e_1	1	1	1	-1	-6
e_2	1	1	-1	-1	0
e_3	1	2	3	4	5

Scanned with OKEN Scanner

e_4	2	1	2	3	1
e_5	3	2	1	2	1
e_1	0	0	2	0	-6
C_1^A	1	1	-1	-1	0
e_3	0	1	4	5	5
e_4	0	-1	4	5	1
e_5	0	-1	4	5	1
e_1	0	0	2	0	-6
C_1^A	1	0	-5	-6	-5
C_2^A	0	1	4	5	5
e_4	0	0	8	10	6
e_5	0	0	8	10	6
C_3^A	0	0	1	0	-3
C_1^A	1	0	0	-6	-20
C_2^A	0	1	0	5	17
e_4	0	0	0	10	30
e_5	0	0	0	10	30
C_3^A	0	1	1	0	-3
C_1^A	1	0	0	0	-2
C_2^A	0	0	0	0	2
C_4^A	0	0	0	1	3
e_5	0	0	0	0	0

Deoarece $\mathbf{b} = -2C_1^A + 2C_2^A - 3C_3^A + 3C_4^A$, rezultă că x_1=-2, x_2=2, x_3=3, x_4=3 este unica soluție a sistemului (sistemul de vectori coloane este bază într-un subspațiu ce conține pe **b**, deci **b** se exprimă în mod unic ca o combinație liniară a elementelor bazei).

Exercițiul 12. Scrieți sistemul din Exemplul precedent sub formele (S') și (S"). Verificați apoi că **(-2, 2, -3, 3)** este soluție pentru sistemul prezentat sub cele trei forme.

Exercițiul 13. Definiți noțiunile: *sistem compatibil, sistem incompatibil, sistem compatibil determinat, sistem compatibil nedeterminat.*

Exercițiul 14. Enunțați teorema Kronecker-Capelli și teorema Rouché-Frobenius.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 16. Vom determina soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_5 - x_6 = -9 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 5 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 2x_6 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 = 12 \\ 10x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 8x_5 - x_6 = 1 \end{cases}$$

Construim tabelele

B_c	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	C_6^A	b
e_1	2	1	0	0	-4	-1	-9
e_2	4	3	2	2	-2	1	5
e_3	0	1	2	2	6	2	23
e_4	5	4	3	3	-1	2	12
e_5	10	7	4	4	-8	-1	1
C_2^A	2	1	0	0	-4	-1	-9
e_2	-2	0	2	2	10	4	32
e_3	-2	0	2	2	10	4	32
e_4	-3	0	3	3	15	6	48
e_5	-4	0	4	4	20	6	64
C_2^A	2	1	0	0	-4	-1	-9
C_3^A	-1	0	1	1	5	2	16
e_3	0	0	0	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0	0	0	0
e_5	0	0	0	0	0	0	0

Rezultă egalitățile

$$\begin{aligned} C_1^A &= 2C_2^A - C_3^A \\ C_4^A &= C_3^A \\ C_5^A &= -4C_2^A + 5C_3^A \\ C_6^A &= -C_2^A + 2C_3^A \\ b &= -9C_2^A + 16C_3^A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} X_1 &= (1,-2,1,0,0,0) \\ X_2 &= (0,0,1,-1,0,0) \\ X_3 &= (0,4,-5,0,1,0) \\ X_4 &= (0,1,-2,0,0,1) \\ X_p &= (0,-9,16,0,0,0) \end{aligned}$$

Soluția generală este $X=X_p+k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3+k_4X_4 \ \forall \ k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$, adică

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 & x_3 &= 16 + k_1 + k_2 - 5k_3 - 2k_4 & x_5 &= k_3 \\ x_2 &= -9 - 2k_1 + 4k_3 + k_4 & x_4 &= -k_2 & x_6 &= k_4 \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

X_p este soluție de bază nedegenerată. **(De ce?)**
Reamintim că sistemul omogen asociat sistemului nostru este

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_5 - x_6 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 2x_6 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 = 0 \\ 10x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 8x_5 - x_6 = 0 \end{cases};$$

soluția generală a lui este $X=k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3+k_4X_4 \ \forall \ k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$, adică

$$x_1 = k_1 \qquad x_3 = k_1 + k_2 - 5k_3 - 2k_4 \qquad x_5 = k_3$$
$$x_2 = -2k_1 + 4k_3 + k_4 \qquad x_4 = -k_2 \qquad x_6 = k_4 .$$

În exemplul următor prezentăm un sistem incompatibil.

Exemplul 17. Vom arăta că sistemul

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

este incompatibil. Construim tabelele

B_c	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	b
e_1	1	-2	3	-4	1	4
e_2	0	1	-1	1	2	-3
e_3	[1]	3	0	-3	3	1
e_4	0	-7	3	1	1	-3
e_5	2	1	3	-7	4	6
e_1	0	-5	3	-1	-2	3
e_2	0	1	-1	[1]	2	-3
C_1^A	1	3	0	-3	3	1
e_4	0	-7	3	1	1	-3
e_5	0	-5	3	-1	-2	4
e_1	0	-4	2	0	0	0
C_4^A	0	1	-1	1	2	-3

Scanned with OKEN Scanner

C_1^A	1	6	-3	0	9	-8
e_4	0	-8	4	0	-1	0
e_5	0	-4	2	0	0	1
e_1	0	-4	2	0	0	0
C_4^A	0	-15	7	1	0	-3
C_1^A	1	-66	33	0	0	-8
C_5^A	0	8	-4	0	1	0
e_5	0	-4	2	0	0	1
C_3^A	0	-2	1	0	0	0
C_4^A	0	-1	0	1	0	-3
C_1^A	1	0	0	0	0	-8
C_5^A	0	0	0	0	1	0
e_5	0	0	0	0	0	1

Din ultimul tabel se vede că e_5 se poate înlocui cu **b** adică rangul matricei extinse este mai mare decât rangul matricei necunoscutelor sistemului, adică sistemul este incompatibil.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ

Programarea liniară este acea ramură a programării matematice care se ocupă de rezolvarea problemelor de programare pentru care atât funcţia obiectiv cât şi restricţiile sunt funcţii liniare. Forma matematică generală a problemelor de programare liniară, în forma în care este şi astăzi acceptată, a fost propusă de G. Dantzig în 1947 care a propus şi un procedeu eficient de rezolvare – *metoda simplex.*

§1. Metoda simplex de rezolvare a problemelor de programare liniară

Nu ne vom ocupa de rezolvarea problemei generale de programare liniară, ci ne vom ocupa numai de o anumită problemă simplificată dar a cărei rezolvare se generalizează şi se poate aplica în multe alte cazuri. Este vorba de aşa-numita *problemă standard* de programare liniară.

1. Probleme care conduc la programe liniare

Vom prezenta mai întâi câteva probleme care vor permite să formulăm problema generală de programare liniară şi care vor evidenţia şi importanţa rezolvării unei astfel de probleme.

Exemplul 1. O întreprindere are trei maşini M_1, M_2, M_3 care prelucrează două tipuri de piese P_1 şi P_2. Se ştie că:

- M_1 poate prelucra o piesă de tip P_1 în 6 minute iar o piesă de tip P_2 în 8 minute
- M_2 poate prelucra o piesă de tip P_1 în 7 minute iar o piesă de tip P_2 în 4 minute
- M_3 poate prelucra o piesă de tip P_1 în 3 minute iar o piesă de tip P_2 în 7 minute.

Reglajele şi întreţinerea în funcţiune a fiecărei maşini necesită timpi afectaţi zilnic (ziua de lucru este de 8 ore) şi anume, 30% pentru maşina M_1,

Scanned with OKEN Scanner

25% pentru maşina M_2 şi 40% pentru maşina M_3. Beneficiul obţinut la vânzarea unei piese P_1 este de 50 unităţi monetare, iar beneficiul obţinut la vânzarea unei piese P_2 este de 60 unităţi monetare. Se cere să se întocmească planul de producţie zilnic astfel încât să se asigure beneficiu maxim.

Dacă întreprinderea prelucrează zilnic x_1 piese de tip P_1 şi x_2 piese de tip P_2 atunci beneficiul întreprinderii este $50x_1+60x_2$ unităţi monetare. Se ştie că prima maşină poate lucra zilnic 20160 minute, a doua- 21600 minute iar a treia 17280 minute. Timpii efectivi de prelucrare, în minute, vor satisface condiţiile:

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \le 20160 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 21600 \\ 3x_1 + 7x_2 \le 17280 \end{cases}$$

Suntem conduşi să rezolvăm problema

$$\begin{cases} \max (50x_1 + 60x_2) \\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 10080 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 21600 \\ 3x_1 + 7x_2 \le 17280 \end{cases} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Acest exemplu se generalizează în felul următor.

a) Problema repartiţiei eficiente a resurselor limitate

Presupunem că într-o fabrică există **m** feluri de resurse $R_1, R_2, ..., R_m$ (maşini, materii prime, mână de lucru, energie electrică, etc..) şi produce **n** tipuri de produse $P_1, P_2, ..., P_n$. Notăm cu a_{ij} (i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ..., n) cantitatea de **i** - resursă folosită în producerea unităţii de **j** - produs, prin b_i- cantitatea totală (stocul) de **i**-resursă (i=1, 2, ..., m) din stoc, prin c_j - beneficiul realizat prin vânzarea unităţii de **j** - produs (j=1, 2, ..., n) şi prin x_j (în prezent necunoscut) cantitatea de **j** - produs ce urmează să fie realizată ($j = \overline{1,n}$). Ne propunem să determinăm valorile necunoscutelor $x_1, x_2, ..., x_n$, astfel încât beneficiul fabricii să fie maxim; cu alte cuvinte ne propunem să determinăm un plan de producţie $x_1, x_2, ..., x_n$ care să asigure un beneficiu maxim

Scanned with OKEN Scanner

pentru fabrică. Datele problemei se prezintă sub forma următorului tabel:

	P_1	P_2	...	P_j	...	P_n	Disponibil
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
:	:	:	...	:	...	:	:
R_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
:	:	:	...	:	...	:	:
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Beneficiu	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	

Suntem conduşi (vezi [1], pag. 129) la următorul model matematic al problemei:

$$(P.L.I)\ )\quad \begin{cases} \max\ {}^tCX \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad i=1,2,..m \\ x_i \ge 0, \quad i=1,2,...n \end{cases} .$$

unde $f(x_1, x_2, ..., x_n) = {}^tC \cdot X = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ este aşa-numita *funcţie obiectiv.*

Exemplul 2. O fermă dispune de **6000 ha** teren arabil pe care îl cultivă cu grâu, porumb şi ovăz. Se cunosc: producţiile medii la hectar q_i, cheltuielile de producţie c_i , beneficiul b_i pentru fiecare tonă de produs, producţiile obligatorii Q_i (impuse fie de convenţiile cu finanţatorii fie de interese proprii fermei) şi cuantumul **C** al finanţării. Datele sunt cuprinse în tabelul următor.

Felul culturii ↓	q_i t/ha	c_i mii lei/ha	b_i mii lei/ha	Q_i t	x_i ha
grâu	3,2	550	500	5000	x_1
porumb	4,8	800	700	8200	x_2
ovăz	2,8	400	600	4400	x_3
		C=35000			

Beneficiul realizat este

$$B=3,2\cdot 500\cdot x_1+4,8\cdot 700\cdot x_2+2,8\cdot 600\cdot x_3 .$$

Scanned with OKEN Scanner

Trebuiesc respectate restricţiile:

$$\begin{cases} 550x_1 + 800x_2 + 400x_3 \le 35000 \\ 3{,}2x_1 \ge 5000 \\ 4{,}8x_2 \ge 8200 \\ 2{,}8x_3 \ge 4400 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6000 \end{cases}$$

S-a obţinut următorul model matematic

$$\begin{cases} \max (3{,}2 \cdot 500 \cdot x_1 + 4{,}8 \cdot 700 \cdot x_2 + 2{,}8 \cdot 600 \cdot x_3) \\ \begin{cases} 550x_1 + 800x_2 + 400x_3 \le 35000 \\ 3{,}2x_1 \ge 5000 \\ 4{,}8x_2 \ge 8200 \\ 2{,}8x_3 \ge 4400 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6000 \end{cases} \end{cases}$$

Prin generalizare se obţine următoarea problemă.

b) Repartiţia optimă a culturilor agricole

O fermă agricolă are suprafaţa arabilă totală **S** pe care se vor cultiva culturile A_1, A_2,..., A_n. Pe baza datelor statistice se ştie că producţia medie la hectar pentru cultura A_i este q_i **t/ha.** Cheltuielile de producţie (directe şi comune) pentru cultura A_i sunt de c_i **mii lei/ha** şi sunt limitate la un total **C**. Pe baza acordului cu finanţatorul şi a comenzilor/necesităţilor proprii, fermierul îşi planifică producţiile Q_i pentru culturile A_i **(i=1, 2, ..., n).** Ştiindu-se că beneficiul pe tona de produs A_i este b_i se cere să se determine suprafeţele x_1, x_2, ... , x_n ce trebuie cultivate cu culturile A_1, A_2,..., A_n astfel încât să se obţină beneficiu maxim fără a se depăşi totalul de cheltuieli alocate, cu realizarea producţiei planificate şi cultivarea întregii suprafeţe.

Se obţine modelul matematic următor.

$$\begin{cases} \max (b_1q_1x_1 + b_2q_2x_2 + ... + b_nq_nx_n) \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = S \\ c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \le C \\ q_1x_1 \ge Q_1 \\ q_2x_2 \ge Q_2 \\ ..... \\ q_nx_n \ge Q_n \end{cases} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 3. Se ştie că 1 Kg ovăz conţine **1,1 g** proteină, **5,9 g** valină, **7,8 g** leucină iar 1 kg de tărâţe conţine **1,6 g** proteină, **7,7 g** valină şi **9,5 g** leucină. Preţul unui kilogram de ovăz este de **3000 lei** iar al unui kilogram de tărâţe este de **5000 lei**. Se cere să se asigure o raţie de preţ minim, formată din ovăz şi tărâţe, care să asigure necesarul biologic de **3,5 g** proteină, **19,9 g** valină şi respectiv **26,7 g** leucină.

Dacă se folosesc x_1 **kg** ovăz şi x_2 **kg** tărâţe se vor cheltui $3000x_1+5000x_2$ lei. Este necesar să fie îndeplinite condiţiile

$$\begin{cases} 1{,}1x_1 + 1{,}6x_2 \geq 3{,}5 \\ 5{,}9x_1 + 7{,}7x_2 \geq 19{,}9 \\ 7{,}8x_1 + 9{,}5x_2 \geq 26{,}7 \end{cases}$$

precum şi condiţiile de nenegativitate $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.
Se obţine modelul matematic

$$\begin{cases} \min\,(3000x_1 + 5000x_2) \\ \begin{cases} 1{,}1x_1 + 1{,}6x_2 \geq 3{,}5 \\ 5{,}9x_1 + 7{,}7x_2 \geq 19{,}9 \\ 7{,}8x_1 + 9{,}5x_2 \geq 26{,}7 \end{cases} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\,. \end{cases}$$

Această situaţie se generalizează în modul următor.

c) Problema dietei

Este bine stabilit că menţinerea stării normale de sănătate a unui individ este condiţionată de prezenţa în hrană a unor anumite principii nutritive $N_1, N_2, \ldots, N_m$ (glucide, lipide, calorii, etc.) în cantităţile $b_1, b_2, \ldots$ şi respectiv b_m ; cantităţile $b_1, b_2, \ldots, b_m$ se numesc *necesaruri biologice* şi sunt stabilite de către biologi. Se ştie că aceste principii nutritive se găsesc în alimentele $A_1, A_2, \ldots, .A_n$; mai exact, se ştie că într-o unitate din alimentul A_j se găsesc a_{ij} unităţi din principiul nutritiv N_i . De asemenea se ştie că o unitate din alimentul A_i costă c_i unităţi monetare. Să se determine un meniu (raţie alimentară) care să asigure necesarul biologic la un preţ minim. Dacă vom nota cu x_i ($i = 1,2,..,n$) cantitatea (încă necunoscută) din alimentul A_i care trebuie inclusă în meniu (raţie), determinarea meniului înseamnă determinarea vectorului $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Datele acestei probleme se pun sub forma următorului tabel

Scanned with OKEN Scanner

	A_1	A_2	...	A_j	...	A_n	Necesar biologic
N_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
N_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
:	:	:	...	:	...	:	:
N_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
:	:	:	...	:	...	:	:
N_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Cost unitar	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	

Rezultă că costul total al raţiei alimentare este

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = {}^tC \cdot X = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j .$$

Condiţia ca meniul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să asigure necesarul biologic de b_i unităţi din principiul nutritiv N_i este

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1,m}) .$$

Înseamnă că funcţia obiectiv $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$ va fi minimizată în raport cu *restricţiile*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = \overline{1,m} .$$

În plus, aşa cum este firesc, trebuie satisfăcute *condiţiile de nenegativitate*

$$x_j \geq 0 \qquad j = \overline{1,n} .$$

Suntem conduşi la următorul model matematic

$$\text{(P.L.II)} \quad \begin{cases} \min {}^tCX \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1,2,..m \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,...n \end{cases} .$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Problema amestecului

Un amestec are în compoziţie **m** substanţe $S_1, S_2, \ldots, S_m$ care se găsesc în materiile prime $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Se ştie că în compoziţia amestecului trebuie să fie (exact) b_i unităţi din substanţa S_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, că într-o unitate din materia M_j se găsesc a_{ij} unităţi din substanţa S_i şi că o unitate din materia primă M_j costă c_j unităţi monetare. Se cere să se determine cantităţile x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ din materia primă M_i care sunt necesare realizării amestecului cu compoziţia prescrisă, la un preţ de cost minim. Dacă vom nota cu x_i $(i = 1,2,..,n)$ cantitatea (încă necunoscută) din materia primă M_i care intră în amestec, determinarea amestecului înseamnă determinarea vectorului $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Datele acestei probleme se pun sub forma următorului tabel

	M_1	M_2	..	M_j	..	M_n	Disponibil
S_1	a_{11}	a_{12}	..	a_{1j}	..	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	..	a_{2j}	..	a_{2n}	b_2
:	:	:	..	:	..	:	:
S_i	a_{i1}	a_{i2}	..	a_{ij}	..	a_{in}	b_i
:	:	:	..	:	..	:	:
S_m	a_{m1}	a_{m2}	..	a_{mj}	..	a_{mn}	b_m
Cost unitar	c_1	c_2	..	c_j	..	c_n	

Costul total al amestecului este

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^tC \cdot X = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j .$$

Condiţia ca amestecul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să asigure necesarul de b_i unităţi din S_i este:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}) .$$

Înseamnă că funcţia obiectiv $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va fi minimizată în raport cu *restricţiile*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = \overline{1,m} .$$

În plus, aşa cum este firesc, trebuiesc satisfăcute *condiţiile de nenegativitate*

Scanned with OKEN Scanner

$$x_j \geq 0 \qquad j = \overline{1,n}.$$

Este important de remarcat că pentru programele liniare **PLI** şi **PLII** sistemele de restricţii se pot transforma în sisteme de ecuaţii utilizând aşa-numitele *variabile de compensare*. **PLI** devine

$$\text{(PLI')} \quad \begin{cases} \max {}^tCX \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i \quad i = 1,2,..m \\ x_j \geq 0, y_i \geq 0 \quad j = 1,2,...n; i = 1,2,...,m \end{cases}.$$

iar **PLII** devine

$$\text{(PLII')} \quad \begin{cases} \max {}^tCX \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i \quad i = 1,2,..m \\ x_j \geq 0, y_i \geq 0 \quad j = 1,2,...n; i = 1,2,...,m \end{cases}.$$

2. Algoritmul Simplex

Problemele practice descrise mai sus, conduc toate la următoarea problemă matematică.

Fie $A = [a_{ij}]_{mxn}$ o matrice reală, $C = {}^t[c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$ şi $b = {}^t[b_1 \ b_2 \dots b_m]$- vectori coloană cunoscuţi iar $X = {}^t[x_1 \ x_2 \dots x_n]$ vectorul coloană al necunoscutelor. Se pune problema să se determine maximul funcţiei obiectiv ${}^tCX$ în raport cu restricţiile:

$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

(aici $X \geq 0$ este o notaţie prescurtată pentru condiţiile $x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}$).

Suntem deci interesaţi să rezolvăm problema

Scanned with OKEN Scanner

$$\text{(P.L.S.)} \qquad \begin{cases} \max {}^{t}CX \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,2,..m \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,...n \end{cases} .$$

Această problemă se numeşte *program liniar standard*(PLS) care se poate rezolva utilizând algoritmul Simplex .

La baza algoritmului Simplex stau următoarele rezultate teoretice.

Teorema 1. Dacă sistemul de restricţii al PLS are o soluţie (admisibilă) atunci el va avea cel puţin o soluţie admisibilă de bază.

Teorema 2. Fie $B = \{a_1, a_2, ...a_r\}$ o bază admisibilă, $X=[x_1\ x_2\ ...\ x_r\ 0...0]$ soluţia admisibilă de bază corespunzătoare şi

$$a_h = \lambda_{1h} a_1 + \lambda_{2h} a_2 + ... + \lambda_{rh} a_r \quad (h = \overline{1,n})$$

expresiile coloanelor matricei A în baza B.

Dacă pentru un anumit $k > r$ fixat există numere pozitive λ_{ik} şi

$$\frac{x_j}{\lambda_{jk}} = \min_{\lambda_{ik}>0} \frac{x_i}{\lambda_{ik}}$$

atunci $B' = \{a_1, ..., a_{j-1}, a_k, a_{j+1}, ..., a_r\}$ este o bază admisibilă.

Teorema 3 În ipotezele şi cu notaţiile Teoremei 2 să schimbăm baza admisibilă B cu baza admisibilă B' cu soluţia admisibilă de bază X_1. Dacă $d_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} c_i - c_k < 0$ atunci ${}^{t}CX_1 \geq {}^{t}CX$.

Teorema 4 Fie $B = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ o bază admisibilă şi

$$a_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ik} a_i \quad (k = \overline{1,n})$$

expresiile coloanelor matricii A în baza B. Dacă pentru toţi k=1,2, ... , n avem $d_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ik} c_i - c_k \geq 0$ atunci baza B şi soluţia admisibilă de bază corespunzătoare sunt optimale.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 5. Fie $B=\{a_1,a_2,.....,a_r\}$ o bază admisibilă. Presupunem că pentru un anumit **k** fixat, $k>r$, d_k este negativ şi $\lambda_{ik}\le 0$, $i=1, 2, \dots, r$. Atunci, funcţia obiectiv, nu este mărginită pe mulţimea **M** a soluţiilor admisibile.

Descrierea algoritmului simplex

Vom presupune că $m=r$, că dispunem de o bază admisibilă **B** şi că X_0 este soluţia admisibilă de bază corespunzătoare. Fără a restrânge generalitatea vom presupune că $B=\{a_1,a_2,.....,a_m\}$ şi că $X_0=[x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0,...,0]$. Fie $\lambda_{jk}\left(j=\overline{1,m};k=\overline{1,n}\right)$ coordonatele vectorilor a_k în baza $B=\{a_1,a_2,.....,a_m\}$; se calculează cantităţile ${}^{T}CX_o$ şi $d_k=\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ik}\cdot c_i-c_k, k=1,2,...,n$ şi se completează tabelul 1.

Tabelul 1

C_B	C_j	$\rightarrow$	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_n
$\downarrow$	B	X_0	a_1	a_2	...	a_m	a_{m+1}	...	a_j	...	a_n
c_1	a_1	x_{10}	1	0	...	0	$\lambda_{1,m+1}$	...	$\lambda_{1,j}$	...	$\lambda_{1,n}$
c_2	a_2	x_{20}	0	1	...	0	$\lambda_{2,m+1}$	...	$\lambda_{2,j}$	...	$\lambda_{2,n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		. . .	. . .		. . .		. . .
c_i	a_i	x_{i0}	0	0	...	0	$\lambda_{i,m+1}$	...	$\lambda_{i,j}$	...	$\lambda_{i,n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		. . .	. . .		. . .		. . .
c_m	a_m	x_{m0}	0	0		1	$\lambda_{m,m+1}$	...	$\lambda_{m,j}$	...	$\lambda_{m,n}$
		${}^{T}CX_0$	0	0	...	0	d_{m+1}	...	d_j	...	d_n

După completarea Tabelului 1 se testează optimalitatea soluţiei cu ajutorul Teoremei 4. Dacă răspunsul este afirmativ (adică toţi $d_k\ge 0$), problema poate fi considerată rezolvată (deoarece s-a găsit o soluţie optimă şi în general nu se urmăreşte obţinerea tuturor soluţiilor optime, ci numai a uneia dintre ele).

Scanned with OKEN Scanner

În caz contrar, adică dacă există **j** astfel încât $d_j < 0$ (evident, $j > r$ pentru că $d_i = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, r$ adică pentru indicii corespunzători bazei), soluția inițială **nu este optimă.**

Există două posibilități :

1. Dacă există un indice **j** pentru care cantitatea d_j este strict negativă şi toți $\lambda_{.ij} \le 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ atunci programul liniar nu are optim finit (conform Teoremei 5 [1], p.141) şi determinarea lui nu mai interesează din punct de vedere matematic.

2. În caz contrar cazului 1 soluția se poate îmbunătăți. Se inițiază prima iterată a algoritmului simplex. Aceasta revine la determinarea vectorilor a_j şi a_i care intră şi respectiv ies din bază.

Vectorul a_j (cel care intră în bază) se determină astfel :

- cantitatea d_j corespunzătoare este:

$$d_j = \min \{d_i \mid d_i < 0\};$$

- cel puțin o coordonată $\lambda_{.kj}$ este pozitivă.

Remarca 4. Alegerea lui d_j negativ minim nu este obligatorie ; ea este justificată de observația că , în majoritatea cazurilor, această alegere are ca efect micşorarea numărului de iterate necesare rezolvării problemei .

Vectorul a_i, care intră în bază, se determină corespunzător indicelui pentru care:

$$\frac{x_{i0}}{\lambda_{ij}} = \min_{\lambda_{kj}>0} \frac{x_{k0}}{\lambda_{kj}},$$

Odată stabiliți cei doi vectori, se recalculează elementele Tabelului 1 construind un tabel de acelaşi tip corespunzător noii baze. Aceasta înseamnă că vor fi calculate, pe baza lemei substituției, coordonatele vectorilor coloană în baza obținută înlocuind a_i cu a_j .

După completarea noului tabel cu cantitățile d_k , $k = 1,2,..,n$, se testează optimalitatea noii soluții. Dacă noua soluție este optimă algoritmul se opreşte. Dacă nu, se începe o nouă iterație.

În cazul în care testul de optimalitate dă răspuns afirmativ, ultimul tabel simplex conține soluția programului liniar. Componen-

Scanned with OKEN Scanner

tele din coloana X_0 sunt chiar componentele bazice ale soluției optime (celelalte sunt nule), iar ${}^tC \cdot X_0$ reprezintă valoarea optimă a funcției obiectiv.

Remarca 1. Ne-am ocupat până acum de maximizarea funcției obiectiv. Uneori este însă nevoie să minimizăm funcția obiectiv. Se poate desigur formula un algoritm pentru minimizarea funcției obiectiv dar nu este nevoie deoarece , pe baza algoritmului prezentat mai sus și ținând cont de egalitatea **min f(x) = - max [-f(x)]**, se poate rezolva și problema de minimizare.

Exemplul 4. Să se determine, dacă există, soluția optimă a problemei:

$$\begin{cases} \max(2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4) \\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 15 \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 47 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 10 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Sistemul de restricții este un sistem de ecuații liniare (cu termeni liberi pozitivi) a cărui matrice a coeficienților necunoscutelor nu conține coloanele matricei unitate. Avem nevoie de o bază admisibilă și de soluția admisibilă de bază corespunzătoare. În acest scop se poate determina soluția generală a sistemului de restricții, după care determinăm o soluție admisibilă și, pe baza demonstrației Teoremei 1 [1] pag. 136 (vezi și Exemplul 1 pag. 137 [1]) determinăm o soluție admisibilă de bază. Construim tabelele:

	C_1	C_2	C_3	C_4	b
e_1	1	-1	2	0	15
e_2	3	3	8	0	47
e_3	[1]	-1	0	-1	10
e_1	0	0	2	[1]	5
e_2	0	6	8	3	17
C_1	1	-1	0	-1	10
C_4	0	0	2	1	5
e_2	0	6	[2]	0	2

Scanned with OKEN Scanner

C_1	1	-1	2	0	15
C_4	0	-6	0	1	3
C_3	0	3	1	0	1
C_1	1	-7	0	0	13

S-a obținut soluția admisibilă $X_0=(13, 0, 1, 3)$ corespunzătoare bazei $B=(C_1, C_3, C_4)$; deci B este bază admisibilă pentru care X_0 este soluția admisibilă de bază corespunzătoare. Se cunosc coordonatele coloanelor în baza B deci se poate construi tabelul de inițiere a algoritmului simplex.

C_B	c_j	$\rightarrow$	2	3	1	-2
$\downarrow$	B	X_0	a_1	a_2	a_3	a_4
2	a_1	13	1	-7	0	0
3	a_3	1	0	3	1	0
-2	a_4	3	0	-6	0	1
		23	0	4	0	0

Pe baza datelor din ultima linie a tabelului se constată că soluția X_0 este optimă iar 23 este valoarea maximă căutată.

În acest caz s-a putut determina destul de uşor o bază admisibilă şi soluția admisibilă de bază corespunzătoare. Din păcate, de obicei nu este atât de uşor de determinat o soluție admisibilă de bază. Se poate apela la Teoremele 1 şi 2.

3. Metoda celor două faze

Există un procedeu de determinare a unei baze admisibile şi a soluției admisibile corespunzătoare rezolvând un program liniar auxiliar. Acest procedeu este cunoscut sub numele de *metoda celor două faze.*

Vom arăta cum se poate determina, utilizând algoritmul simplex, o soluție admisibilă de bază pentru problema standard

(1) $$\max {}^tC \cdot X = \max\left(c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n\right)$$

(2) $$A \cdot X = b \qquad X \geq 0$$

Fără a micşora generalitatea vom presupune că $b \geq 0$. În caz contrar, înmulțind cu -1 egalitățile cu termeni liberi negativi se obține o problemă pentru care $b \geq 0$.

Pentru început considerăm programul liniar:

(3) $$\min\left(y_1 + y_2 + ... + y_m\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

(4) $A \cdot X + I_m \cdot Y = b, \quad X \geq 0, \quad Y \geq 0$

unde $Y = {}^t[y_1, \ldots\ldots, y_m]$; variabilele $y_1, \ldots\ldots, y_m$ se numesc *variabile artificiale*.

Dacă X_0 este o soluție admisibilă a programului [(1),(2)] atunci $X_1 = {}^t[X_0 \ 0 \ldots 0] \in R^{n+m}$ este soluție optimă a programului asociat [(3), (4)].

Reciproc, orice soluție admisibilă a programului [(3),(4)] care are componentele artificiale egale cu zero ${}^t[X_0 \ 0]$ conduce la soluția admisibilă X_0 a programului inițial. Aceste observații conduc la următorul procedeu - numit *metoda celor două faze* - pentru determinarea unei soluții de bază admisibile a problemei [(1),(2)] (și apoi rezolvarea ei).

Descrierea metodei celor două faze

Faza 1. Se rezolvă problema auxiliară [(3),(4)] luând drept bază admisibilă de plecare baza naturală din $\mathbb{R}^m$. Deoarece pentru această problemă nu poate fi vorba de optim infinit, la sfârșitul acestei faze vom fi în una dintre următoarele trei situații :

1. valoarea optimă este strict pozitivă,
2. valoarea optimă este zero și nici o variabilă artificială nu este bazică,
3. valoarea optimă este zero și cel puțin o variabilă artificială este bazică.

În cazul 1 programul inițial nu are nici o soluție admisibilă pentru că dacă X_0 ar fi soluție admisibilă, $X_1 = {}^t[X_0 \ 0]$ ar fi soluție optimă a problemei asociate și în acest caz am avea $\min(y_1 + \ldots\ldots + y_m) = 0$, contrar ipotezei.

În cazul 2, renunțând la componentele artificiale, obținem o soluție admisibilă de bază a problemei [(1),(2)].

În sfârșit, în cazul al 3-lea, soluția de bază conține și componentele artificiale care vor fi însă egale cu zero (în caz contrar optimul nu ar putea fi zero). În acest caz obținem o soluție de bază degenerată a problemei inițiale.

În situațiile 2 și 3 se trece la realizarea fazei a doua.

Faza 2. Se trece la rezolvarea problemei de optimizare inițială având drept soluție de bază de plecare soluția determinată la sfârșitul primei faze, folosind algoritmul simplex descris anterior.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă la sfârşitul primei faze suntem în situaţia 2, primul tabel al fazei a 2-a se obţine din ultimul tabel al primei faze renunţând la coloanele corespunzătoare variabilelor artificiale şi utilizând costurile corespunzătoare problemei iniţiale; dacă la sfârşitul primei faze suntem în situaţia 3, primul tabel al fazei a 2-a se obţine din ultimul tabel al primei faze renunţând la coloanele tabelului corespunzătoare variabilelor artificiale nebazice; se foloseşte funcţia obiectiv

$$^{t}C'\cdot X = c_1 \cdot x_1 + ... + c_n \cdot x_n + 0 \cdot y_{i_1} + ... + 0 \cdot y_{i_s}$$

unde $y_{i_1} .....y_{i_s}$ sunt variabile artificiale bazice.

Exemplul 5. Să se determine soluţia optimă a programului liniar

$$\begin{cases} \min(-x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_5) \\ \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 \le -5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Ţinând cont că $\min(-x_1+3x_2+2x_3-3x_5) = -\max(x_1-3x_2-2x_3+3x_5)$ şi de faptul că este indicat ca toţi termenii liberi să fie nenegativi trecem la rezolvarea problemei

$$\begin{cases} \max(x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_5) \\ \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

în care prima restricţie se obţine din restricţia iniţială corespunzătoare prin înmulţirea cu -1.

Pentru a obţine un program liniar standard transformăm prima restricţie în egalitate folosind variabila de compensare (de ecart) y. Rezultă

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases}\max(x_1-3x_2-2x_3+3x_5)\\ \begin{cases}-2x_1+2x_2-x_3+3x_4-y=5\\ 3x_1+4x_2-2x_3-3x_4=12\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5=4\end{cases}\\ x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0,x_4\ge 0,x_5\ge 0,y\ge 0\end{cases}$$

Matricea sistemului de restricţii conţine numai coloana a treia a matricei unitate de ordinul 3 deci nu putem obţine direct o bază admisibilă şi soluţia admisibilă de bază corespunzătoare (în caz că există). Apelăm la metoda celor două faze dar vom introduce atâtea variabile artificiale cât va fi suficient să putem găsi uşor o bază admisibilă. Vom construi programul ajutător

$$\begin{cases}\min(z_1+z_2)=-\max(-z_1-z_2)\\ \begin{cases}-2x_1+2x_2-x_3+3x_4-y+z_1=5\\ 3x_1+4x_2-2x_3-3x_4+z_2=12\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5=4\end{cases}\\ x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0,x_4\ge 0,x_5\ge 0,y\ge 0,z_1\ge 0,z_2\ge 0\end{cases}$$

Matricea sistemului de restricţii este

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$a_1\quad a_2\quad a_3\quad a_4\quad a_5\quad a_6\quad a_7\quad a_8$$

Se constată că baza $B=(a_7, a_8, a_5)$ este bază admisibilă pentru care $X_0=(0, 0, 0, 0, 4, 0, 5, 12)$ este soluţia admisibilă de bază corespunzătoare. Coordonatele coloanelor matricei A în baza B sunt chiar componentele lor deoarece B este chiar baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Deoarece rangul matricei A este egal cu numărul de restricţii construim tabelele

c_B	c_j	$\rightarrow$	0	0	0	0	0	0	-1	-1
$\downarrow$	B	X_0	a_1	$\Downarrow a_2$	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
-1	a_7	5	-2	2	-1	3	0	-1	1	0
-1	a_8	12	3	4	-2	-3	0	0	0	1
0	a_5	4	2	-1	3	1	1	0	0	0
		-17	-1	-6	3	0	0	1	0	0

Scanned with OKEN Scanner

0	a_2	5/2	-1	1	-1/2	3/2	0	-1/2	1/2	0
-1	←a_8	2	⇓7	0	0	3	0	2	-1/2	1
0	a_5	13/2	1	0	5/2	5/2	1	-1/2	1/2	0
		-2	-7	0	0	-3	0	-1	1/2	0
0	a_2	39/14	0	1	-1/2	27/7	0	-3/14	6/7	
0	a_2	2/7	1	0	0	3/7	0	2/7	-1/14	1/7
0	a_5	87/14	0	0	5/2	29/14	1	-1/14	13/28	
		0	0	0	0	0	0	0	1	1

Faza II

c_B	c_j	→	2	3	1	-2	0	0
↓	B	X_0	a_1	a_2	⇓a_3	a_4	a_5	⇓a_6
3	a_2	39/14	0	1	-1/2	3/14	0	-3/14
2	a_1	2/7	1	0	0	-9/7	0	2/7
0	←a_5	87/14	0	0	5/2	53/14	1	-11/14
		125/7	0	0	-5/2	1/14	0	-1/14
3	a_2	141/35	0	1	0	34/35	1/5	-26/70
2	←a_1	2/7	1	0	0	-9/7	0	2/7
1	a_3	87/35	0	0	1	53/35	2/5	-11/35
		104/35	0	0	0	12/35	1	-6/7
3	a_2	22/5	13/10	1	0	-3/7	1/5	0
0	a_6	1	7/2	0	0	-9/2	0	1
1	a_3	98/35	11/10	0	1	1/10	2/5	0
		16	3	0	0	57/70	1	0

Din ultimul tabel rezultă că valoarea optimă este **–16** iar soluția optimă este $X_{opt}=(0, 3, 98/35, 0, 0)$.

4°. Dualitatea în programarea liniară

Vom rezolva mai întâi problema dietei corespunzătoare tabelu-lui următor după care vom construi problema dual simetrică asociată şi vom analiza legăturile dintre soluțiile celor două probleme.

Reamintim mai întâi câteva elemente din teoria dualității.

Programele liniare din perechea

$$(5)\quad \begin{cases} \min {}^tCX \\ AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} \max {}^tbY \\ {}^tAY \leq C. \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

se numesc programe *dual-simetrice*. Fiecare dintre ele se numeşte program dual celuilalt. Într-o pereche de programe dual-simetrice unul din cele două programe se numeşte program *primal* iar celălalt - program *dual* acestuia.

Se vede acum că trecerea de la un program la programul dual se face astfel :

- operatorul **min** se transformă în operatorul **max**,
- vectorii **C** şi **b** se schimbă între ei,
- $\geq$ se transformă în $\leq$,
- matricea **A** se tranformă în matricea ${}^{t}\mathbf{A}$.

Se vede că transformările de mai sus sunt **simetrice** în sensul că dacă aplicăm aceste transformări programului (6) se obţine programul (5). De aceea se spune că cele două programe sunt *dual-simetrice*.

Dacă una dintre problemele (5) şi (6) are funcţia obiectiv nemărginită atunci cealaltă nu are soluţii admisibile.

Teorema fundamentală. Dată o pereche de programe dual-simetrice, atunci:

1. dacă unul dintre programe are optim finit şi celălalt are optim finit şi valorile acestor optime sunt egale,
2. dacă unul dintre programe are optim infinit, celălalt nu are soluţie.

Pentru a rezolva cele două programe le transformăm mai întâi în programe standard utilizând variabile de compensare.

Ultimul tabel pentru problema (5) conţine:

- în coloanele corespunzătoare variabilelor de compensare, soluţia problemei (6)
- în coloanele matricei restricţiilor, valorile variabilelor de compensare pentru problema standard asociată problemei (6).

Prin urmare, ultimul tabel pentru problema (5) conţine, pe ultima linie atât soluţia optimă a problemei (6) cât şi soluţia optimă a problemei standard asociată problemei (6). De asmenea, ultimul tabel pentru problema (6) conţine, pe ultima linie atât soluţia optimă a problemei (5) cât şi soluţia optimă a problemei standard asociată problemei (5). Deci este suficient să rezolvăm una din problemele unei perechi duale pentru a avea şi răspunsul la cealaltă problemă. Evident, în practică se va alege pentru rezolvare problema care se

Scanned with OKEN Scanner

rezolvă mai uşor. în exemplele de mai jos clar că era suficient să rezolvăm problema (7).

	F_1	F_2	Necesar biologic b_i
N_1	0,1	0,2	0,4
N_2	0,3	0,1	0,6
N_3	0,1	0,4	0,8
N_4	0,2	0,1	1,2
Costuri unitare c_i	1,4	1,8	

Modelul matematic corespunzător este

$$\begin{cases} \min\,(1{,}4x_1 + 1{,}8x_2) \\ \begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \geq 0{,}4 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 \geq 0{,}6 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 \geq 0{,}8 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \geq 1{,}2 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Trecem la problema echivalentă

$$\begin{cases} \min\,(14x_1 + 18x_2) = 2\min(7x_1 + 9x_2) \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 12 \end{cases} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Utilizând variabile de compensare (ecart) îi asociem în mod obişnuit programul liniar standard

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases}\max(-7x_1-9x_2)\\ \begin{cases}x_1+2x_2-u_1=4\\ 3x_1+x_2-u_2=6\\ x_1+x_2-u_3=8\\ 2x_1+x_2-u_4=12\end{cases}\\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, u_1\geq 0, u_2\geq 0, u_3\geq 0, u_4\geq 0\end{cases}$$

Matricea sistemului de restricții nu conține coloanele matricei unitate de ordinul 4, deci vom folosi metoda celor două faze. Programul liniar standard asociat este:

$$\begin{cases}\min(v_1+v_2+v_3+v_4)=-\max(-v_1-v_2-v_3-v_4)\\ \begin{cases}x_1+2x_2-u_1+v_1=4\\ 3x_1+x_2-u_2+v_2=6\\ x_1+x_2-u_3+v_3=8\\ 2x_1+x_2-u_4+v_4=12\end{cases}\\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, u_1\geq 0, u_2\geq 0, u_3\geq 0, u_4\geq 0, v_1\geq 0, v_2\geq 0, v_3\geq 0, v_4\geq 0\end{cases}$$

Matricea sistemului de restricții are 10 coloane pentru care $\mathbf{B}=(a_7, a_8, a_9, a_{10})$ este bază admisibilă a cărei soluții admisibile de bază corespunzătoare este $X_0=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 6, 8, 12)$. Deoarece baza **B** este baza canonică din $\mathbb{R}$ coloanele matricei sistemului de restricții se exprimă în mod evident sub formă de combinații liniare ale bazei **B**.

Tabelele pentru realizarea Fazei I sunt prezentate în pagina 105.

Trecem la Faza II. Renunțăm la coloanele corespunzătoare necunoscutelor artificiale dar revenim la costurile inițiale.

Faza II

c_B	c_j	$\rightarrow$	-7	-9	0	0	0	0
$\downarrow$	B	X_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-9	a_2	6/7	1	0	0	0	-2/7	1/7
-7	a_1	39/7	0	1	0	0	1/7	-4/7
0	a_3	23/7	0	0	1	0	-3/7	-2/7
0	a_4	81/7	0	0	0	1	1/7	-11/7
		327/7	0	0	0	0	11/7	19/7

Scanned with OKEN Scanner

Faza I

c_B	c_j	$\rightarrow$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
$\downarrow$	B	X_0	$\Downarrow a_1$	$\Downarrow a_2$	$\Downarrow a_3$	$\Downarrow a_4$	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
-1	$\lrcorner a_7$	4	1	[2]	-1	0	0	0	1	0	0	0
-1	a_8	6	3	1	0	-1	0	0	0	1	0	0
-1	a_9	9	1	4	0	0	-1	0	0	0	1	0
-1	a_{10}	12	2	1	0	0	0	-1	0	0	0	1
		-31	-7	-8	1	1	1	1	0	0	0	0
0	a_2	2	½	1	-½	0	0	0	½	0	0	0
-1	a_8	4	5/2	0	½	-1	0	0	-½	1	0	0
-1	$\lrcorner a_9$	1	-1	0	[2]	0	-1	0	-2	0	1	0
-1	a_{10}	10	3/2	0	½	0	0	-1	-½	0	0	1
		-15	-3	0	-3	1	1	1	4	0	0	0
0	a_2	9/4	1/4	1	0	0	-1/4	0	0	0	1/4	0
-1	$\lrcorner a_8$	15/4	[11/4]	0	0	-1	1/4	0	0	1	-1/4	0
0	a_3	1/2	-½	0	1	0	-½	0	-1	0	½	0
-1	a_{10}	39/4	7/4	0	0	0	1/4	-1	0	0	-1/4	1
		-27/2	-9/2	0	0	1	-½	1	1	0	3/2	0
0	a_2	21/11	0	1	0	1/11	-3/11	0	0	-1/11		0
0	a_1	15/11	1	0	0	-4/11	1/11	0	0	4/11	-1/11	0
0	a_3	13/11	0	0	1	-2/11	-5/11	0	-1	2/11		0
-1	$\lrcorner a_{10}$	81/11	0	0	0	[7/11]	1/11	-1	0	-7/11	-1/11	1
			0	0	0	-7/11	-1/11	1	1	18/11	1/11	0
0	a_2	6/7	0	1	0	0	-2/7	1/7	0			
0	a_1	39/7	1	0	0	0	1/7	-4/7	0			
0	a_3	23/7	0	0	1	0	-3/7	-2/7	-1			
0	a_4	81/7	0	0	0	1	1/7	-11/7	0	-1	-1/7	
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare valoarea optimă este **2/10·327/7** iar soluţia optimă este $X_{opt}=(39/7;\ 6/7)$.

Construim acum problema dual-simetrică asociată programului analizat mai sus.

$$\begin{cases}\max\ (4y_1+6y_2+9y_3+12y_4)\\ \begin{cases}y_1+3y_2+y_3+2y_4\le 7\\ 2y_1+y_2+4y_3+y_4\le 9\end{cases}\\ y_1\ge 0, y_2\ge 0\end{cases}$$

Folosind variabile de compensare obţinem programul standard

$$\begin{cases}\max\ (4y_1+6y_2+9y_3+12y_4)\\ \begin{cases}y_1+3y_2+y_3+2y_4+z_1=7\\ 2y_1+y_2+4y_3+y_4+z_2=9\end{cases}\\ y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_3\ge 0, y_4\ge 0, z_1\ge 0, z_2\ge 0\end{cases}$$

Matricea sistemului de restricţii conţine coloanele matricei unitate de ordinul doi, deci $B=(a_5, a_6)$ este bază admisibilă cu soluţia admisibilă de bază $X_0=(0, 0, 0, 0, 7, 9)$. Construim tabelele

c_B	c_j	$\rightarrow$	4	6	9	12	0	0
$\downarrow$	B	X_0	a_1	a_2	$\Downarrow a_3$	$\Downarrow a_4$	a_5	a_6
0	$\hookleftarrow a_5$	7	1	3	1	[2]	1	0
0	a_6	9	2	1	4	1	0	1
		0	-4	-6	-9	-12	0	0
12	a_4	7/2	1/2	3/2	1/2	1	1/2	0
0	a_6	11/2	3/2	-1/2	[7/2]	0	-1/2	1
		42	2	12	-3	0	6	0
12	a_4	18/7	2/7	11/7	0	1	4/7	-1/7
9	a_3	11/7	3/7	-1/7	1	0	-1/7	2/7
		327/7	23/7	81/7	0	0	39/7	6/7

Exerciţiul 1. Citiţi din ultima linie a problemei duale soluţia problemei primale şi din ultima linie a problemei primale soluţia problemei duale. Se verifică sau nu indicaţiile teoretice din pag. 102?

Scanned with OKEN Scanner

§2. Problema transporturilor

1. Modelul matematic al problemei transporturilor

Construim mai întâi modelul matematic pentru o problemă concretă de transport care sperăm să uşureze înţelegerea atât a problemei generale a transporturilor cât şi modul concret de construcţie a modelului matematic corespunzător.

Problema 1: O fermă agricolă dispune de **1200** tone de cartofi depozitată în localităţile L_1, L_2, L_3 în cantităţile **350** tone, **580** tone şi respectiv **270** tone. Această cantitate trebuie transportată la fabricile de glucoză F_1, F_2, F_3 şi F_4 cărora le sunt necesare cantităţile de **250** tone, **425** tone, **350** tone şi respectiv **175** tone. Se cere să se determine un plan de transport de cost minim, care să conducă la satisfacerea tuturor cererilor, ştiindu-se că preţurile de transport sunt cele prezentate în tabelul următor:

	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	25	18	32	15
L_2	14	15	30	21
L_3	12	24	15	20

Se notează cu x_{ij} cantităţile ce urmează să fie transportate de la localitatea L_i la fabrica F_j. Costul total al transportului este:

$$P = 25x_{11}+18x_{12}+32x_{13}+15x_{14}+14x_{21}+15x_{22}+30x_{23}+21x_{24}+12x_{31}+$$
$$+24x_{32}+15x_{33}+20x_{34}\,.$$

Deoarece cererea totală este egală cu stocul existent (adică problema este echilibrată) rezultă

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=350 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=580 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=270 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=250 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=425 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=350 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=175 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

La aceste condiții se adaugă condițiile de nenegativitate $x_{ij} \geq 0$, i=1, 2, 3, j=1, 2, 3, 4.

Prin urmare, modelul matematic al acestei probleme este următorul:

$$\begin{cases} \min P, \quad P = 25x_{11} + 18x_{12} + 32x_{13} + 15x_{14} + 14x_{21} + 15x_{22} + \\ \qquad + 30x_{23} + 21x_{24} + 12x_{31} + 24x_{32} + 15x_{33} + 20x_{34} \\ \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 350 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 580 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 270 \end{cases} \\ \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 250 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 425 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 350 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 175 \end{cases} \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n \end{cases}$$

Vom prezenta acum problema generală de transport şi modelul matematic corespunzător.

O marfă de află în depozitele furnizorilor $F_1, F_2,...,F_m$ în cantitățile (stocurile) $s_1, s_2,...,s_m$ şi trebuie transportată beneficiarilor $B_1, B_2,...,B_n$ în cantitățile $b_1, b_2,..., b_n$. Cunoscând costul c_{ij} al transportului unității de marfă de la furnizorul F_i la beneficiarul B_j se cere să se facă o repartiție a mărfii astfel încât beneficiarii să fie complet satisfăcuți iar costul total al transportului să fie minim.

Vom nota cu x_{ij} cantitatea de marfă ce urmează să plece de la furnizorul F_i la beneficiarul B_j.

Datele problemei se prezintă sintetic sub forma tabelului următor

Beneficiari → Furnizori ↓	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	Stocuri
F_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	s_1
F_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	s_2
...	...	...	...	...	...	...	...
F_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	s_i

Scanned with OKEN Scanner

...	...	...	...	...	...	...	...
F_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	s_m
Necesaruri	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	B = S

Modelul matematic al problemei transporturilor este

$$(PT)\quad \begin{cases} \min P,\ P=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij} \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i,\ i=1,2,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,\ j=1,2,\dots,n \end{cases} \\ x_{ij} \ge 0,\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n \end{cases}$$

2. Rezolvarea problemei transporturilor

Urmând modelul programelor liniare generale, vom spune că soluția **X** a PT este *soluție admisibilă* dacă componentele ei satisfac atât sistemul de restricții cât şi condițiile de nenegativitate.

Evident, pentru ca problema de transport să aibă soluție este necesar ca stocul total $S = s_1 + s_2 + \dots + s_m$ să depăşească sau să fie egal cu cererea totală $B = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Condiția $S \ge B$ este şi suficientă pentru existența unei soluții admisibile a problemei (P.T). Intr-adevăr, $X = (x_{ij} = \frac{s_i\ b_j}{S})$ este soluție admisibilă deoarece

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{s_i\ b_j}{S} = s_i \cdot \frac{B}{S} \le s_i,\ i=1,2,\dots,m$$

şi

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i\ b_j}{S} = b_j \cdot \frac{S}{S} = b_j,\ j=1,2,\dots,n.$$

Problema de transport se rezolvă mai uşor în cazul în care stocul total de marfă S este egal cu cererea totală B, adică

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n = B.$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz se spune că avem de a face cu o problemă de transport *echilibrată* (PTE).

Orice problemă de transport pentru care **S > B** se poate transforma într-o problemă de transport echilibrată. Acest lucru se realizează prin considerarea unui beneficiar fictiv B_{n+1} care ar urma să solicite $b_{n+1} = S - B$ cantitate de marfă; se va considera că costurile de transport $c_{i,n+1} = 0$ $(\forall\ i = 1,2,...,m)$. Evident necunoscutele $x_{i,n+1}$ $(i = 1,2,...,m)$ joacă rolul de variabile de compensare. In acest caz, după rezolvarea problemei, cantitatea de marfă care s-ar cuveni beneficiarului fictiv B_{n+1} rămâne de fapt în depozitele furnizorilor.

În cazul **S < B** problema de transport nu are soluție. Este firesc să se modifice problema cerându-se satisfacerea beneficiarilor la cotă maximă posibilă, în limitele stocului total existent şi la un preț total (de transport) minim. Şi această nouă problemă se transformă într-o problemă echilibrată considerând un furnizor fictiv F_{m+1} care ar produce $s_{m+1} = B - S$ unități de marfă; costurile de transport de la F_{m+1} la beneficiari sunt $c_{m+1,j}=0$, $j=1, 2, ..., n$.

Ne vom ocupa deci de rezolvarea problemelor de transport echilibrate.

Ținând cont că un program optim este acela prin care se va transporta la fiecare beneficiar exact cantitatea de marfă solicitată modelul matematic al unei probleme de transport echilibrate **(PTE)** este:

$$(PTE)\quad \begin{cases} \min P,\ P = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij} \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i,\ i = 1,2,...,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,2,...,n+1 \end{cases} \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n+1 \end{cases},$$

S-a obținut un program liniar standard şi poate fi rezolvat utilizând metoda simplex. Apar însă câteva dezavantaje majore care fac utilizarea metodei simplex ineficientă şi anume

- numărul mare **mn** de variabile,

Scanned with OKEN Scanner

- lipsa unei baze admisibile inițiale,
- apariția frecventă a degenerărilor.

Toate aceste remarci impun găsirea unor metode specifice de rezolvare a problemei (PTE).

Rangul matricei asociate sistemului de restricții este cel mult $\mathbf{n + m - 1}$, datorită condiției de echilibrare.

O soluție admisibilă se numește *soluție admisibilă de bază* dacă coloanele matricei sistemului de restricții corespunzătoare componentelor nenule ale ei formează o bază în spațiul vectorial generat de toate coloanele acestei matrice; o soluție admisibilă de bază se numește *nedegenerată* dacă are $\mathbf{n + m - 1}$ componente nenule.

O problemă de transport se numește *nedegenerată* dacă orice soluție admisibilă de bază a sa este nedegenerată ; în caz contrar se spune că problema de transport este *degenerată*. Există însă criterii care ne ajută să recunoaștem dacă problema este degenerată. Are loc următorul rezultat:

Teorema 1. O problemă de transport este degenerată dacă și numai dacă există un sistem de indici $i_1, i_2,...,i_s$ cu $s \leq m$ și un sistem de indici $j_1, j_2,...,j_t$ cu $t \leq n$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^{s} s_{i_k} = \sum_{\ell=1}^{t} b_{j_\ell}.$$

În rezolvarea unui program **PT** se disting etapele:

I) determinarea unei soluții admisibile de bază (de dorit) nedegenerată,

II) ameliorarea unei astfel de soluții,

III) determinarea familiei tuturor soluțiilor optime.

Ne vom ocupa numai de primele două probleme.

3. Determinarea unei soluții admisibile de bază nedegenerate

Există multe metode de determinare a unei soluții admisibile de bază nedegenerate, dintre care citățm: *metoda colțului de nord-vest, metoda minimelor pe linii, metoda minimelor pe tabel,* etc.. Aceste metode nu sunt comparabile, în sensul că nu există una mai bună decât celelalte pentru orice problemă de transport. Există exemple de probleme de

Scanned with OKEN Scanner

transport pentru care metoda colţului de nord-vest conduce la o soluţie optimă, alte exemple în care una din celelalte două metode amintite conduce direct la soluţii optime. De regulă, dar nu totdeauna, metoda minimelor pe tabel conduce la soluţii mai apropiate de o soluţie optimă.

Exemplul 7. Să comparăm soluţiile admisibile de bază obţinute utilizând atât metoda colţului de nord-vest, metoda minimelor pe linii cât şi metoda minimelor pe tabel pentru problema de transport echilibrată corespunzătoare tabelului următor :

	B_1	B_2	B_3	B_4	Stocuri
F_1	1	2	2	3	20
F_2	2	3	1	3	15
F_3	1	2	5	2	10
Necesaruri	15	10	5	15	45

Vom folosi mai întâi metoda colţului de nord-vest. Atribuim mai întâi valoarea x_{11}=**min (15, 20)=15;** beneficiarul B_1 fiind complet satisfăcut se renunţă la coloana 1. Noului tabel i se aplică aceeaşi procedură. Se obţine tabelul următor:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Stocuri	Stocuri actualizate
F_1	15	5			20	5; 0
F_2		5	5	5	15	10; 5
F_3				10	10	0
Necesaruri	15	10	5	15	45	
Necesaruri actualizate	0	5 0	0	0		

Deci, prin metoda colţului de Nord-Vest se obţine soluţia nedegenerată: $x_{11} = 15$, $x_{12} = 5$, $x_{22} = 5$, $x_{23} = 5$, $x_{24} = 5$, $x_{34} = 10$, iar ceilalţi $x_{ij} = 0$.

Costul transportului este

$$P = 15 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 80.$$

Folosind metoda minimelor pe linii se obţine tabelul

Scanned with OKEN Scanner

		B_1	B_2	B_3	B_4	Stocuri
F_1	cost	1	2	2	3	20
	necesar	15	10	5	15	5
	dat	15		5		0
F_2	cost	2	3	1	3	15
	necesar	*	10	*	15	0
	dat				15	
F_3	cost	1	2	5	2	10
	necesar	*	10	*	*	0
	dat		10			

S-a obținut soluția (degenerată): $x_{11} = 15$, $x_{13} = 5$, $x_{24} = 15$, $x_{32} = 10$, iar ceilalți $x_{ij} = 0$.

Costul transportului este

$$P = 15 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 90.$$

Prin urmare, soluția obținută prin metoda colțului de nord-vest este mai bună decât cea găsită prin metoda minimelor pe linii. În plus, soluția obținută prin metoda minimelor pe linii este şi degenerată.

Folosind metoda minimelor pe tabel se obține tabelul

	B_1	B_2	B_3	B_4	Stocuri
F_1	1 5(2)	2 10(4)	2 *	3 5(5)	20; 15; 5; 0
F_2	2 *	3 *	1 5(3)	3 10(6)	15; 10, 0
F_3	1 10(1)	2 *	5 *	2 *	10, 0
Necesaruri	15; 5; 0	10; 0	5; 0	15; 10; 0	45

Numerele dintre paranteze reprezintă numărul alegerii. Menționăm că la prima alegere, am atribuit lui B_1, corespunzător costului minim pe tabel c_{31}, cantitatea $x_{31} = \min\{15; 10\} = 10$. Stocul furnizorului F_3 fiind epuizat, se renunță la linia 3 (lucru marcat prin steluțe) iar pentru tabelul rămas se atribuie lui B_1, corespunzător costului minim, cantitatea $x_{11} = \min\{5; 20\} = 5$, adică minimul dintre necesarul actual al lui B_1 şi stocul furnizorului F_1. Beneficiarul B_1 fiind satisfăcut, se renunță şi la coloana 1 şi se actualizează stocul lui F_1; noului tabel i se aplică apoi aceeaşi procedură.

Scanned with OKEN Scanner

Costul transportului este

$$P=10\cdot1+5\cdot1+5\cdot1+10\cdot2+5\cdot3+10\cdot3=85.$$

Acest cost este egal cu costul corespunzător soluției obținute prin metoda colțului de nord-vest.

Exemplul 8. Vom compara acum soluțiile admisibile de bază obținute utilizând cele trei metode amintite mai sus pentru Problema 1, care este o problemă de transport echilibrată. Vom determina mai întâi o soluție admisibilă de bază pentru Problema 1 folosind metoda **colțului de Nord-Vest.**

	F_1	F_2	F_3	F_4	s_i	Stocuri actualizate
L_1	250	100	*	*	350	100, 0
L_2	*	325	255	*	580	255, 0
L_3	*	*	95	175	270	175, 0
b_j	250	425	350	175		
Necesaruri actualizate	0	325 0	95 0	0		

Costul corespunzător acestei soluții este

$$P=250\cdot25+100\cdot18+325\cdot15+255\cdot30+95\cdot15+175\cdot20=25500.$$

Vom determina acum o soluție admisibilă de bază folosind metoda **minimelor pe linii.**

		F_1	F_2	F_3	F_4	stocuri
L_1	Cost Necesar dat	25 250	18 425 175	32 350	15 175 175	350 175 0
L_2	Cost Necesar dat	14 250 250	15 250 250	30 350 80	21 *	580 330 80 0
L_3	Cost Necesar dat	12 *	24 *	15 270 270	20 *	270 0

Costul transportului corespunzător acestei soluții este:

$$P=175\cdot18+175\cdot15+250\cdot14+250\cdot15+80\cdot30+270\cdot15=19475.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom folosi acum metoda **costului minim pe tabel** pentru a determina o soluţie admisibilă de bază a problemei.

	F_1	F_2	F_3	F_4	s_i	Stocuri actualizate
L_1	*	*	175	175	350	175
L_2	*	425	155	*	580	155, 0
L_3	250	*	20	*	270	20, 0
b_j	250	425	350	175		
Necesaruri actualizate	0	0	330 175, 0	0		

Costul transportului corespunzător acestei soluţii este

$$P = 175\cdot32+175\cdot15+425\cdot15+155\cdot30+250\cdot12+20\cdot15 = 22550.$$

De această dată se constată că metoda minimelor pe linii este mai eficientă.

4. Ameliorarea unei soluţii admisibile de bază nedegenerate

Vom determina soluţia optimă a Problemei 1 folosind mai întâi soluţia admisibilă de bază obţinută prin metoda colţului de Nord-Vest. Cu ajutorul ciclurilor obţinem:

$\delta_{13}=32-30+15-18= -1$ $\qquad$ $\delta_{24}=21-20+15-30= -14$

$\delta_{14}=15-20+15-30+15-18=$ $\boxed{-23}$ $\qquad$ $\delta_{31}=12-25+18-15+30-15=5$

$\delta_{21}=14-25+18-15= -8$ $\qquad$ $\delta_{32}=24-15+30-15=24.$

Existenţa unor cantităţi δ_{ij} negative ne spune că soluţia nu este optimă. Pe baza ciclului asociat celulei **(1,4)** (corespunzătoare lui δij negativ minim) rezultă că obţinem o nouă soluţie admisibilă de bază de componente bazice $x_{11}=250$, $x_{14}=100$, $x_{22}=425$, $x_{23}=155$, $x_{33}=195$, $x_{34}=75$ şi $P=24370$ (<25500).

Prezentăm modul în care se construieşte ciclul pentru celula liberă (1, 4). Similar se construieşte ciclul pentru orice celulă liberă. Se atribuie valoarea θ celulei (1, 4) după care se fac compensări numai prin celule ocupate care să asigure respectarea condiţiei de echilibrare şi obţinerea unei soluţii a problemei. Pentru ca soluţia obţinută să fie de bază e necesar ca una dintre componentele nou modificate să devină nulă. În acest scop se alege $\theta=\min(100, 255, 175)=100$, adică minima valorilor din colţurile negative.

Scanned with OKEN Scanner

	F_1	F_2	F_3	F_4	s_i
L_1	250	100-θ	*	θ*	350
L_2	*	325+θ	255-θ	*	580
L_3	*	*	95+θ	175-θ	270
b_j	250	425	350	175	

Pentru noua soluție se reia algoritmul de lucru.

$\delta_{12}=18-15+30-15+20-15=23$ $\quad$ $\delta_{24}=21-20+15-30=-14$

$\delta_{13}=32-15+20-15=22$ $\quad$ $\delta_{31}=12-20+15-25=-18$

$\delta_{21}=14-30+15-20+15-25=\boxed{-31}$ $\quad$ $\delta_{32}=24-15+30-15=24$.

Pe baza ciclului asociat celulei (2,1) rezultă că obținem soluția de componente bazice $x_{11}=175$, $x_{14}=175$, $x_{21}=75$, $x_{22}=425$, $x_{23}=80$, $x_{33}=270$ și $P=20875$.

$\delta_{12}=18-15+14-25=-8$ $\quad$ $\delta_{31}=12-14+30-15=13$

$\delta_{13}=32-30+14-25=\boxed{-9}$ $\quad$ $\delta_{32}=24-15+30-15=24$

$\delta_{24}=21-15+25-14=17$ $\quad$ $\delta_{34}=20-15+30-14+25-15=31$.

Pe baza ciclului asociat celulei (1,3) rezultă că obținem soluția de componente bazice $x_{11}=95$, $x_{13}=80$, $x_{14}=175$, $x_{21}=155$, $x_{22}=425$, $x_{33}=270$ și $P=20155$.

$\delta_{12}=18-15+14-25=\boxed{-8}$ $\quad$ $\delta_{31}=12-25+32-15=4$

$\delta_{23}=30-32+25-14=9$ $\quad$ $\delta_{32}=24-15+32-25+14-15=15$

$\delta_{24}=21-15+25-14=17$ $\quad$ $\delta_{34}=20-15+32-15=22$.

Pe baza ciclului asociat celulei (1,2) rezultă că obținem soluția de componente bazice $x_{12}=95$, $x_{13}=80$, $x_{14}=175$, $x_{21}=250$, $x_{22}=330$, $x_{33}=270$ și $P=19395$.

$\delta_{11}=25-18+15-14=8$ $\quad$ $\delta_{31}=12-14+15-18+32-15=12$

$\delta_{23}=30-32+18-15=1$ $\quad$ $\delta_{32}=24-18+32-15=23$

$\delta_{24}=21-15+18-15=9$ $\quad$ $\delta_{34}=20-15+32-15=22$.

Deoarece toți δ_{ij} sunt nenegativi, soluția precedentă este optimă. Costul optim al transportului este

$$P_{opt}=95\cdot18+80\cdot32+175\cdot15+250\cdot14+330\cdot15+270\cdot15=19395.$$

Menționăm că am calculat mereu costul de transport pentru a avea un control calitativ al lucrului: dacă se lucrează corect, costul transportului trebuie să nu crească de la o iterație la următoarea.

Vom determina acum soluția optimă a Problemei 1 folosind soluția admisibilă de bază obținută prin metoda minimelor pe linii.

$\delta_{11}=25-18+15-14=88$ $\quad$ $\delta_{31}=12-14+30-15=13$

Scanned with OKEN Scanner

$\delta_{13}=32-30+15-18=$ **-1** $\qquad \delta_{32}=24-15+30-15=24$

$\delta_{24}=21-15+18-15=9 \qquad \delta_{34}=20-15+30-15+18-15=23.$

Pe baza ciclului asociat celulei **(1,3)** rezultă că obținem soluția de componente bazice $x_{12}=95$, $x_{13}=80$, $x_{14}=175$, $x_{21}=250$, $x_{22}=330$, $x_{33}=270$. Așa cum am verificat mai sus, această soluție este optimă.

Vom determina soluția optimă a aceleiași probleme folosind soluția admisibilă de bază obținută prin metoda minimelor pe tabel, dar utilizând de această dată *metoda duală*.

	$v_1 \leftrightarrow F_1$	$v_2 \leftrightarrow F_2$	$v_3 \leftrightarrow F_3$	$v_4 \leftrightarrow F_4$	s_i
$u_1 \leftrightarrow L_1$	25	18	32 175	15 175	350
$u_2 \leftrightarrow L_2$	14	15 425	30 155	21	580
$u_3 \leftrightarrow L_3$	12 250	24	15 20	20	270
b_j	250	425	350	175	

Introducând variabilele u_i şi v_j (vezi [1] pag. 176) se obține, corespunzător căsuțelor ocupate, sistemul

$u_1+v_3=32 \qquad u_2+v_3=30$

$u_1+v_4=15 \qquad u_3+v_1=12$

$u_2+v_2=15 \qquad u_3+v_3=15.$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=-2$, $u_3=-17$, $v_1=29$, $v_2=17$, $v_3=32$, $v_4=15$.

Atunci, pe baza formulei $\delta_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ obținem pentru toate celulele libere

$\delta_{11}=25-0-29=-4 \qquad \delta_{24}=21+2-15=8$

$\delta_{12}=18-0-17=1 \qquad \delta_{32}=24+17-17=24$

$\delta_{21}=14+2-29=$ **-13** $\qquad \delta_{34}=20+17-15=22.$

La fel ca în metoda precedentă se vor interpreta cantitățile δ_{ij}. Pe baza ciclului asociat celulei **(2,1)** se obține soluția de componente bazice $x_{13}=175$, $x_{14}=175$, $x_{21}=155$, $x_{22}=425$, $x_{31}=95$, $x_{33}=175$ (P=20535) la fel ca în metoda precedentă.

Sistemul corespunzător este

$u_1+v_3=32 \qquad u_2+v_2=15$

$u_1+v_4=15 \qquad u_3+v_1=12$

$u_2+v_1=14 \qquad u_3+v_3=15.$

Scanned with OKEN Scanner

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=-15$, $u_3=-17$, $v_1=29$, $v_2=30$, $v_3=32$, $v_4=15$.
Atunci

$\delta_{11}=25-0-29=-4$ $\quad$ $\delta_{24}=21+15-15=21$

$\delta_{12}=18-0-30=\boxed{-12}$ $\quad$ $\delta_{32}=24+17-30=11$

$\delta_{23}=30+15-32=13$ $\quad$ $\delta_{34}=20+17-15=22.$

Pe baza ciclului asociat celulei (2,1) rezultă că obținem soluția de componente bazice $x_{12}=95$, $x_{13}=80$, $x_{14}=175$, $x_{21}=250$, $x_{22}=330$, $x_{33}=270$. $\quad$ $P=19395$.

Sistemul corespunzător este

$u_1+v_2=18$ $\quad$ $u_2+v_1=14$

$u_1+v_3=32$ $\quad$ $u_2+v_2=15$

$u_1+v_4=15$ $\quad$ $u_3+v_3=15.$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=-3$, $u_3=-17$, $v_1=17$, $v_2=18$, $v_3=32$, $v_4=15$.
Atunci

$\delta_{11}=25-0-17=8$ $\quad$ $\delta_{31}=12+17-17=12$

$\delta_{23}=30+3-32=1$ $\quad$ $\delta_{32}=24+17-18=23$

$\delta_{24}=21+3-15=9$ $\quad$ $\delta_{34}=20+17-15=22.$

Deoarece toți δ_{ij} sunt nenegativi soluția precedentă este optimă.
Se constată că, de această dată, soluția optimă se obține mai rapid dacă plecăm de la soluția admisibilă determinată prin metoda minimelor pe linii

5. Probleme de transport degenerate

Exemplul 9. Vom rezolva problema de transport corespunzătoare tabelului următor:

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i
F_1	3	7	4	2	25
F_2	6	2	5	8	10
F_3	1	4	8	4	15
b_j	20	10	15	5	

Se constată că problema este echilibrată dar este degenerată pentru că există sume parțiale de stocuri egale cu sume parțiale de cereri.

Determinăm o soluție admisibilă de bază utilizând mai întâi metoda colțului de Nord-Vest.

Scanned with OKEN Scanner

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i	
F_1	3 20	7 5	4 *	2 *	25	5, 0
F_2	6 *	2 5	5 5	8 *	10	5, 0
F_3	1 *	4 *	8 10	4 5	15	5, 0
b_j	20	10	15	5		
	0	5, 0	10, 0	0		

Deşi degenerarea nu se evidenţiază încă, ea poate apare pe parcurs.

$\delta_{13}=4-5+2-7=$ **-6** $\delta_{21}=6-3+7-2=8$ $\delta_{31}=1-3+4-8=-6$

$\delta_{14}=2-4+8-5+2-7=-4$ $\delta_{24}=8-4+8-5=7$ $\delta_{32}=4-2+5-8=-1$

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i	
F_1	3 20	7 ε	4 5	2 *	25+ε	5, 0
F_2	6 *	2 10-ε	5	8 *	10-ε	5, 0
F_3	1 *	4 *	8 10	4 5	15	5, 0
b_j	20	10	15	5		
	0	5, 0	10, 0	0		

$\delta_{14}=2-4+8-4=2$ $\delta_{23}=5-4+7-2=6$ $\delta_{31}=1-3+4-8=-6$

$\delta_{21}=6-3+7-2=8$ $\delta_{24}=8-2+7-4+8-4=13$ $\delta_{32}=4-7+4-8=$ **-7.**

Accepăm că $\varepsilon<10$ şi obţinem tabelul

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i	
F_1	3 20	7	4 5+ε	2 *	25+ε	5, 0
F_2	6 *	2 10-ε	5	8 *	10-ε	5, 0
F_3	1 *	4 ε	8 10-ε	4 5	15	5, 0

Scanned with OKEN Scanner

b_j	20	10	15	5		
	0	5, 0	10, 0	0		

$\delta_{12}=7-4+1-3=1$ $\delta_{21}=6-3+4-8+4-2=1$ $\delta_{24}=8-4+4-2=6$

$\delta_{14}=2-4+8-4=2$ $\delta_{23}=5-2+4-8=-1$ $\delta_{31}=1-3+4-8=\boxed{-6}$

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i	
F_1	3 $10+\varepsilon$	7	4 15	2 *	$25+\varepsilon$	5, 0
F_2	6	2 $10-\varepsilon$	5	8	$10-\varepsilon$	5, 0
F_3	1 $10-\varepsilon$	4 ε	8	4 5	15	5, 0
b_j	20	10	15	5		
	0	5, 0	10, 0	0		

$\delta_{12}=7-3+1-4=7$ $\delta_{21}=6-1+4-2=7$ $\delta_{24}=8-4+4-2=6$

$\delta_{14}=2-4+4-7=\boxed{-5}$ $\delta_{23}=5-4+3-1+4-2=5$ $\delta_{33}=8-1+3-4=6$

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i	
F_1	3 $5+\varepsilon$	7	4 15	2 5	$25+\varepsilon$	5, 0
F_2	6	2 $10-\varepsilon$	5	8	$10-\varepsilon$	5, 0
F_3	1 $15-\varepsilon$	4 ε	8	4	15	5, 0
b_j	20	10	15	5		
	0	5, 0	10, 0	0		

$\delta_{12}=7-3+1-4=1$ $\delta_{23}=5-4+3-1+4-2=5$ $\delta_{33}=8-4+3-1=6$

$\delta_{21}=6-2+4-1=7$ $\delta_{24}=8-2+3-1+4-2=10$ $\delta_{34}=4-2+3-1=4.$

Deoarece toți $\delta_{ij}>0$ soluția problemei perturbate este optimă. Punând $\varepsilon=0$ obținem soluția optimă (degenerată) a problemei inițiale și anume $x_{11}=5$, $x_{13}=15$, $x_{14}=5$, $x_{22}=10$, $x_{31}=15$, $x_{32}=0$ (aici x_{32} este componentă bazică). Costul transportului este: **P=120.**

Exercițiul 2 . Un complex zootehnic este format din 5 ferme F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. De pe cele patru terenuri ale complexului s-au adunat respectiv 440 tone, 600 tone, 400 tone și 560 tone fân. Fânul trebuie

Scanned with OKEN Scanner

transportat la cele 5 ferme în cantităţile: 360 tone, 520 tone, 660 tone, 150 tone şi respectiv 320 tone. Distanţele în kilometri de la loturi la ferme sunt date în tabelul următor:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
Lot 1	5	10	8	3	7
Lot 2	2	3	6	9	3
Lot 3	4	4	6	9	6
Lot 4	8	4	8	5	5

Să se stabilească planul de transport astfel încât distanţa totală parcursă să fie minimă.

6. Rezolvarea unor probleme de transport neechilibrate

Exemplul 10. Să rezolvăm problema de transport (neechilibrată) corespunzătoare tabelului următor:

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i
F_1	4	2	3	4	30
F_2	3	4	5	3	60
F_3	6	3	3	5	50
b_j	30	30	40	20	

Se vede că stocul total **S=140** depăşeşte cererea totală **B=120**. În acest caz, procedura standard impune considerarea uni beneficiar fictiv B_5 care ar urma să ceară cantitatea **S-B=20** unităţi de marfă. Construim atunci tabelul

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	s_i
F_1	4	2	3	4	0	30
F_2	3	4	5	3	0	60
F_3	6	3	3	5	0	50
b_j	30	30	40	20	20	

Evident, în acest caz nu mai pare normal să apelăm la metode de cost minim pentru determinarea unei soluţii admisibile de bază iniţiale. Apelând la metoda colţului de Nord-Vest se obţine soluţia

Scanned with OKEN Scanner

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	s_i
F_1	30	*	*	*	*	30, 0
F_2	ε	30	30	*	*	60+ε, 60, 30, 0
F_3	*	*	10	20	20	50, 40, 20, 0
b_j	30+ε	30, 0	40, 10, 0	20, 0	20	

Folosind metoda perturbării am construit o problemă de transport echilibrată şi am determinat o soluţie admisibilă nedegenerată al cărei cost de transport corespunzător este **P=520+3ε.**

Alegerea costurilor nule de la furnizori la beneficiarul B_5 este o convenţie utilă care permite ca în partea finală, calculele pentru determinarea costului optim să fie neafectate de utilizarea beneficiarului fictiv. Menţionăm că există obiceiul ca în locul costurilor de transport nule să se prefere costuri mult mai mari decât cele reale pentru a marginaliza beneficiarul fictiv. Faptul că astfel de preţuri sunt la alegerea celui care rezolvă problema induce gândul că este normal să folosim metoda colţului de Nord-Vest. Vom compara soluţiile admisibile de bază determinate prin cele trei metode.

Căutăm acum soluţia problemei prin **metoda minimelor pe linii.** Obţinem tabelul:

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	s_i
F_1	Cost	4	2	3	4	0	30
	Necesar	30	30	40	20	20	10
	dat		10			20	0
F_2	Cost	3	4	5	3	0	60
	Necesar	30	20	40	20	*	30
	dat	30	10		20		10, 0
F_3	Cost	6	3	3	5	0	50
	Necesar	*	20	40	*	*	40
	dat		10	40			0

Costul total al transportului este **P=360.** Prin urmare, soluţia obţinută pe această cale este mai bună decât precedenta şi în plus, la această etapă, s-a evitat evidenţierea degenerării. Acest lucru s-a datorat faptului că diferenţa S-B este mică în comparaţie cu cererile furnizorilor.

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie remarcat că se ajunge la aceeași soluție dacă folosim metoda minimului pe tabel.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
F_1	30	*	*	*	*
F_2	ε	30	30	*	*
F_3	*	*	10	20	20

Vom rezolva problema de transport ameliorând soluția obținută prin metoda colțului de Nord-Vest. Obținem sistemul

$u_1+v_1=4$ $u_2+v_1=3$ $u_2+v_2=4$

$u_2+v_3=5$ $u_3+v_3=3$ $u_3+v_4=5$

$u_3+v_5=0$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=-1$, $u_3=-3$, $v_1=4$, $v_2=5$, $v_3=6$, $v_4=8$, $v_5=3$.

$\delta_{12}=2-0-5=-3$ $\delta_{13}=3-0-6=-3$ $\delta_{14}=4-0-8=-4$

$\delta_{15}=0-0-3=-3$ $\delta_{24}=3+1-8=-4$ $\delta_{25}=0+1-3=-2$

$\delta_{31}=6+3-4=5$ $\delta_{32}=3+3-5=1$.

Pe baza ciclului asociat celulei (2,4) rezultă că obținem soluția de componente bazice $x_{11}=30$, $x_{21}=\varepsilon$, $x_{22}=30$, $x_{23}=10$, $x_{24}=20$, $x_{33}=30$, $x_{35}=20$. P=

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
F_1	30	*	*	*	*
F_2	ε	30	10	20	*
F_3	*	*	30		20

Obținem sistemul

$u_1+v_1=4$ $u_2+v_1=3$ $u_2+v_2=4$

$u_2+v_3=5$ $u_2+v_4=3$ $u_3+v_3=3$

$u_3+v_5=0$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=-1$, $u_3=-3$, $v_1=4$, $v_2=5$, $v_3=6$, $v_4=4$, $v_5=3$.

$\delta_{12}=2-0-5=-3$ $\delta_{13}=3-0-6=-3$ $\delta_{14}=4-0-4=0$

$\delta_{15}=0-0-3=-3$ $\delta_{25}=0+1-3=-2$ $\delta_{31}=6+3-4=5$

Scanned with OKEN Scanner

$\delta_{32}=3+3-5=1$ $\delta_{34}=5+3-4=4$

Pe baza ciclului asociat celulei (1,3) rezultă că obținem soluția de componente bazice $x_{11}=20$, $x_{13}=10$, $x_{21}=10+\varepsilon$, $x_{22}=30$, $x_{24}=20$, $x_{33}=30$, $x_{35}=20$. P=

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
F_1	20		10		
F_2	$10+\varepsilon$	30		20	
F_3			30		20

Obținem sistemul

$u_1+v_1=4$ $u_1+v_3=3$ $u_2+v_1=3$

$u_2+v_2=4$ $u_2+v_4=3$ $u_3+v_3=3$

$u_3+v_5=0$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=-1$, $u_3=0$, $v_1=4$, $v_2=5$, $v_3=3$, $v_4=4$, $v_5=0$.

$\delta_{12}=2-0-5=-3$ $\delta_{14}=4-0-4=0$ $\delta_{15}=0-0-3=-3$

$\delta_{23}=5+1-3=3$ $\delta_{25}=0+1-0=1$ $\delta_{31}=6-0-4=2$

$\delta_{32}=3-0-5=-2$ $\delta_{34}=5-0-4=1$

Pe baza ciclului asociat celulei (1,2) rezultă că obținem soluția de componente bazice $x_{12}=20$, $x_{13}=10$, $x_{21}=30+\varepsilon$, $x_{22}=10$, $x_{24}=20$, $x_{33}=30$, $x_{35}=20$. P=

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
F_1		20	10		
F_2	$30+\varepsilon$	10		20	
F_3			30		20

Obținem sistemul

$u_1+v_2=2$ $u_1+v_3=3$ $u_2+v_1=3$

$u_2+v_2=4$ $u_2+v_4=3$ $u_3+v_3=3$

$u_3+v_5=0$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=2$, $u_3=0$, $v_1=1$, $v_2=2$, $v_3=3$, $v_4=1$, $v_5=0$.

$\delta_{11}=4-0-1=3$ $\delta_{14}=4-0-1=3$ $\delta_{15}=0-0-0=0$

Scanned with OKEN Scanner

$\delta_{23}=5-2-3=0$ $\delta_{25}=0-2-0=-2$ $\delta_{31}=6-0-1=5$

$\delta_{32}=3-0-2=1$ $\delta_{34}=5-0-1=4$

Pe baza ciclului asociat celulei (2,5) rezultă că obţinem soluţia de componente bazice $x_{12}=30$, $x_{21}=30+\varepsilon$, $x_{22}=\varepsilon$, $x_{24}=20$, $x_{25}=10$, $x_{33}=30$, $x_{35}=20$. P=

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
F_1		30			
F_2	$30+\varepsilon$	ε		20	10
F_3			40		10

Obţinem sistemul

$u_1+v_2=2$ $u_2+v_1=3$ $u_2+v_2=4$

$u_2+v_4=3$ $u_2+v_5=0$ $u_3+v_3=3$

$u_3+v_5=0$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=2$, $u_3=2$, $v_1=1$, $v_2=2$, $v_3=1$, $v_4=1$, $v_5=-2$.

$\delta_{11}=4-0-1=3$ $\delta_{13}=3-0-1=2$ $\delta_{14}=4-0-1=3$

$\delta_{15}=0-0+2=2$ $\delta_{23}=5-2-1=2$ $\delta_{31}=6-2-1=3$

$\delta_{32}=3-2-2=-1$ $\delta_{34}=5-2-1=2$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
F_1		30			
F_2	$30+\varepsilon$			20	$10+\varepsilon$
F_3		ε	40		$10-\varepsilon$

Obţinem sistemul

$u_1+v_2=2$ $u_2+v_1=3$ $u_2+v_4=3$

$u_2+v_5=0$ $u_3+v_2=3$ $u_3+v_3=3$

$u_3+v_5=0$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=1$, $u_3=1$, $v_1=2$, $v_2=2$, $v_3=2$, $v_4=2$, $v_5=-1$.

$\delta_{11}=4-0-2=2$ $\delta_{13}=3-0-2=1$ $\delta_{14}=4-0-4=0$

$\delta_{15}=0-0+1=1$ $\delta_{23}=5-1-2=2$ $\delta_{31}=6-1-2=3$

Scanned with OKEN Scanner

$\delta_{32}=3-1-2=0$ $\delta_{34}=5-1-2=3$

Soluţia problemei este degenerată şi se obţine pentru $\varepsilon=0$ şi are componentele nenule $x_{12}=30$, $x_{21}=30$, $x_{24}=20$, $x_{33}=40$. Preţul total al transportului este $P=330$.

Vom rezolva problema de transport ameliorând soluţia obţinută prin metoda minimelor pe linie.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
F_1		10			20
F_2	30	10		20	
F_3		10	40		

Considerăm sistemul

$u_1+v_2=2$ $u_1+v_5=0$ $u_2+v_1=3$

$u_2+v_2=4$ $u_2+v_4=3$ $u_3+v_2=3$

$u_3+v_3=3$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=2$, $u_3=1$, $v_1=1$, $v_2=2$, $v_3=2$, $v_4=1$, $v_5=0$.

$\delta_{11}=4-0-1=3$ $\delta_{13}=3-0-2=1$ $\delta_{14}=4-0-1=3$ $\delta_{23}=5-2-2=1$

$\delta_{25}=0-2-0=-2$ $\delta_{31}=6-1-1=4$ $\delta_{34}=5-1-1=3$ $\delta_{35}=0-1-0=-1$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
F_1		20			10
F_2	30			20	10
F_3		10	40		

Considerăm sistemul

$u_1+v_2=2$ $u_1+v_5=0$ $u_2+v_1=3$

$u_2+v_4=3$ $u_2+v_5=0$ $u_3+v_2=3$

$u_3+v_3=3$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=0$, $u_3=1$, $v_1=3$, $v_2=2$, $v_3=2$, $v_4=3$, $v_5=0$.

$\delta_{11}=4-0-3=1$ $\delta_{13}=3-0-2=1$ $\delta_{14}=4-0-3=1$ $\delta_{22}=4-0-2=2$

$\delta_{23}=5-0-2=3$ $\delta_{31}=6-1-3=2$ $\delta_{34}=5-1-3=1$ $\delta_{35}=0-1-0=-1$

Scanned with OKEN Scanner

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
F_1		30			
F_2	30			20	10
F_3		ε	40		10

Considerăm sistemul

$u_1+v_2=2$ $u_2+v_1=3$ $u_2+v_4=3$

$u_2+v_5=0$ $u_3+v_2=3$ $u_3+v_3=3$

$u_3+v_5=0$

Punând $u_1=0$ rezultă $u_2=1$, $u_3=1$, $v_1=2$, $v_2=2$, $v_3=2$, $v_4=2$, $v_5=-1$.

$\delta_{11}=4-0-2=2$ $\delta_{13}=3-0-2=1$ $\delta_{14}=4-0-2=2$ $\delta_{15}=0-0+1=1$

$\delta_{22}=4-1-2=1$ $\delta_{23}=5-1-2=2$ $\delta_{31}=6-1-2=3$ $\delta_{34}=5-1-2=2$.

Soluția problemei este degenerată şi se obține pentru $\varepsilon=0$ şi are componentele nenule $x_{12}=30$, $x_{21}=30$, $x_{24}=20$, $x_{33}=40$. Prețul total al transportului este $P=330$.

Exemplul 11. Să rezolvăm problema de transport (neechilibrată) corespunzătoare tabelului următor:

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i
F_1	3	1	5	4	17
F_2	2	5	3	7	29
F_3	6	1	4	3	14
	21	27	18	24	

Se constată că stocul total $S=60$ este mai mic decât cererea totală $B=90$. În acest caz problema de transport propriu zisă nu are soluție dar este firesc să se accepte satisfacerea cerințelor în măsura posibilităților asigurate de stocul existent. În acest scop se construieşte o problemă de transport echilibrată prin acceptarea unui furnizor fictiv care ar produce cantitatea de marfă $B-S=90$.

Se obține tabelul următor

Scanned with OKEN Scanner

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i
F_1	3	1	5	4	17
F_2	2	5	3	7	29
F_3	6	1	4	3	14
F_4	0	0	0	0	30
	21	27	18	24	

Utilizând metoda minimului pe tabel obținem soluția de plecare

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i
F_1			7	10	17, 7
F_2	21		8		29, 8, 0
F_3				14	14, 0
F_4		27	3		30, 3, 0
	21, 0	27, 0	18, 15, 7,0	24, 10	

Folosind ciclurile obținem

$\delta_{11}=3-2+3-5=-1$ $\delta_{12}=1-0+0-5=\boxed{-4}$ $\delta_{22}=5-0+0-3=2$

$\delta_{24}=7-4+5-3=5$ $\delta_{31}=6-2+3-5+4-3=3$ $\delta_{32}=1-0+0-5+4-3=-3$

$\delta_{33}=4-5+4-3=0$ $\delta_{41}=0-0+3-2=1$ $\delta_{41}=0-4+5-0=1.$

	B_1	B_2	B_3	B_4	s_i
F_1		7		10	17, 7
F_2	21		8		29, 8, 0
F_3				14	14, 0
F_4		20	10		30, 3, 0
	21, 0	27, 0	18, 15, 7,0	24, 10	

Această soluție este optimă pentru că

$\delta_{11}=3-2+3-0+0-1=3$ $\delta_{13}=5-1+0-0=4$ $\delta_{22}=5-0+0-3=2$

$\delta_{24}=7-3+0-0+1-4=1$ $\delta_{31}=6-2+3-0+0-1+4-3=7$ $\delta_{32}=1-3+4-1=1$

$\delta_{33}=4-0+0-1+4-3=4$ $\delta_{41}=0-2+3-0=1$ $\delta_{44}=0-0+7-4=3.$

Ca soluție a problemei inițiale acceptăm $x_{12}=7$, $x_{14}=10$, $x_{21}=21$, $x_{23}=8$, $x_{34}=14$ cu prețul de transport $P=155$ unități monetare.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR

În numeroase domenii de activitate şi mai ales în cercetare se întâlnesc scheme care pot fi reprezentate prin puncte şi arce (orientate sau nu) care unesc aceste puncte: circuitele electrice în fizică, electronică şi electrotehnică, diagramele moleculare în chimie, reţelele de comunicaţii şi transport, dendogramele şi reţelele neuronice în biologie, diagramele de organizare în economie, etc..

La început, teoria grafurilor părea a fi un capitol destul de neînsemnat al matematicii având de a face mai mult cu jocurile şi amuzamentele matematice. Apariţia în 1736 a primului memoriu de teoria grafurilor, datorat lui L. Euler, a atras atenţia asupra importanţei acestui domeniu.

În prezent, pe lângă utilizarea în cercetarea matematică, teoria grafurilor este intens utilizată în biologie, economie, psihologie, etc..

§1. Grafuri orientate

1. Definiţii. Exemple

Grafurile sunt obiectele matematice obţinute abstractizând figurile geometrice formate din linii (curbe simple) care unesc o familie de puncte; dacă aceste linii sunt toate orientate se vorbeşte de grafuri orientate.

Definiţia 1. a) Un graf orientat **G** este o pereche **G = (X,U)** formată dintr-o mulţime nevidă **X** ale cărei elemente se numesc **vârfuri** şi o mulţime **U** de perechi ordonate de elemente din **X** ale cărei elemente se numesc **arce.**

b) Pentru un arc **u=(x, y)∈U** vârful **x** se numeşte *extremitate iniţială* (sau *origine*) iar vârful **y** se numeşte *extremitate finală* (sau *extremitate*); se mai spune că vârfurile **x** şi **y** sunt *adiacente* sau că **x** şi **y** sunt *incidente* arcului **u**. Un vârf neincident nici-unui arc se numeşte *vârf izolat*

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{U}$ se spune că **u** este *incident spre exterior din* **x** şi *incident spre interior lui* **y**; se mai spune că muchia **u** este *adiacentă vârfurilor* **x** *şi* **y**.

Exerciţiul 1. Arătaţi că Definiţia 1 este echivalentă cu Definiţia 1 din [1] pag. 178.

Graful format numai din vârfuri izolate se numeşte *graf nul.*

Dacă **X** şi **U** sunt mulţimi finite, vom spune că graful **G** este *graf finit*; numărul $|\mathbf{X}| = \mathbf{card\ X}$ se numeşte *ordinul* grafului. În cele ce urmează ne vom ocupa numai de grafuri finite.

Un arc pentru care extremităţile coincid se numeşte *buclă.* Pentru consecvenţa prezentării, vom considera pe orice buclă orientarea dată de sensul direct trigonometric; de obicei bucla este considerată de două ori (odată cu un sens, odată cu sensul opus), dar noi vom folosi convenţia făcută mai înainte.

Fiecărui graf i se poate asocia o imagine geometrică obţinută reprezentând elementele mulţimii **X** prin puncte sau cerculeţe mici iar mulţimea arcelor prin curbe fără autointersecţii orientate (prin săgeţi care indică orientarea de la originea spre extremitatea fiecărui arc). În reprezentarea grafică se caută ca - atât cât este posibil - arcele să nu se intersecteze, pentru a nu se confunda intersecţiile arcelor cu vârfuri ale grafului. Grafurile pentru care este posibil acest lucru se numesc *grafuri planare.* Grafurile planare sunt utilizate în proiectarea şi realizarea circuitelor electronice. Există grafuri care nu sunt planare.

Exemplul 1. Considerăm graful $\mathbf{G} = (\mathbf{X},\mathbf{U})$ unde $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ şi $\mathbf{U} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)\}$. Imaginea geometrică a acestui graf este dată în **Fig.1.**

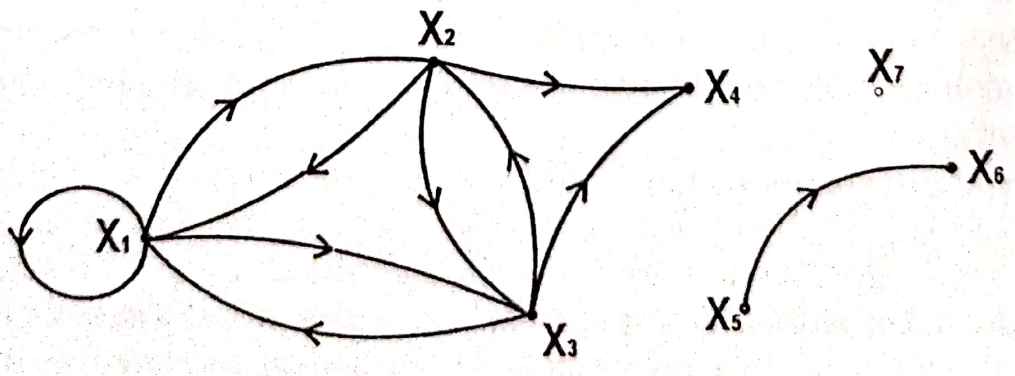


Fig. 1

Scanned with OKEN Scanner

Exercițiul 2. Identificați în graful de mai sus vârfurile izolate și câteva perechi de vârfuri neadiacente.

Definiția 2. a) Un graf $G' = (X', U')$ se numește *subgraf* al grafului $G = (X,U)$ dacă $X' \subset X$, $U' \subset U$ și U' este format numai din arce adiacente la vârfuri din X'. În cazul particular $X'=X$ se spune că G' este *graf parțial*.

b) Graful $G_A=(A, V)$ unde $A \subset X$ este o submulțime nevidă de vârfuri iar V este mulțimea tuturor arcelor din U cu extremitățile în A se numește *subgraful lui* G *generat de* A.

c) Graful $G_V=(A, V)$ unde $V \subset U$ este o submulțime nevidă de arce iar A este mulțimea tuturor vârfurilor din X adiacente arcelor din V se numește *subgraful lui* G *generat de* V.

Exercițiul 3. În graful din Exercițiul 1 identificați două grafuri parțiale, subgraful generat de familiile de vârfuri $A_1= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A_2= \{x_5, x_6\}$, $A_3= \{x_7\}$, subgraful generat de familia de arce $V= \{(x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_5, x_6)\}$.

Definiția 3. a) Un arc $u = (x, y) \in U$ este *incident spre exterior* mulțimii (nevide) de vârfuri $A \subset X$ dacă $x \in A$ și $y \notin A$; vom nota cu $\omega^+(A)$ mulțimea arcelor incidente spre exterior mulțimii A.

b) Un arc $u = (x, y) \in U$ este *incident spre interior* mulțimii nevide de vârfuri $A \subset X$ dacă $x \notin A$ și $y \in A$; vom nota cu $\omega^-(A)$ mulțimea arcelor incidente spre interior mulțimii A.

c) Un arc $u = (x, y) \in U$ este *incident* mulțimii (nevide) de vârfuri $A \subset X$ dacă sau $x \in A$ sau $y \in A$ dar $\{x, y\} \not\subset A$; mulțimea $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$ reprezintă *mulțimea arcelor incidente mulțimii* A.

Exercițiul 4. În graful din Exercițiul 1 determinați $\omega^+(A)$, $\omega^-(A)$ și $\omega(A)$ pentru $A= \{x_1, x_2, x_4, x_6\}$.

Definiția 4. a) Se numește *lanț de lungime* q în graful orientat $G = (X, U)$ o succesiune ordonată de q arce $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_q})$ cu proprietățile :

- $u_{i_k} \neq u_{i_{k+1}}$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$,
- pentru orice k $(2 \leq k \leq q-1)$, una dintre extremitățile arcului u_{i_k} coincide cu o extremitate a arcului $u_{i_{k-1}}$, iar cealaltă extremitate coincide cu o extremitate a arcului $u_{i_{k+1}}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Extremitatea **x** a arcului u_{i_1} care nu este extremitate a lui u_{i_2} şi extremitatea **y** a arcului u_{i_q} care nu este extremitate pentru $u_{i_{q-1}}$ se numesc *extremităţile libere* ale lanţului. Vom nota cu $L_{x,y}$ un lanţ pentru care **x, y** sunt extremităţile libere; îl vom numi şi **x,y**-*lanţ*. c) Un lanţ simplu pentru care extremităţile libere coincid se numeşte *ciclu.*

Este de remarcat faptul că prima condiţie din Definiţia 7 asigură că într-un lanţ nu se vor folosi arce care să fie parcurse consecutiv o dată într-un sens şi o dată în sens contrar .

Definiţia 5.a) Un lanţ se numeşte *simplu* dacă la parcurgerea sa fiecare arc este întâlnit o singură dată. b) Un lanţ se numeşte *elementar* dacă la parcurgerea sa fiecare vârf este întâlnit o singură dată. c) Un ciclu elementar care conţine toate vârfurile grafului se numeşte *ciclu hamiltonian.* d) Un ciclu care foloseşte toate arcele grafului se numeşte *ciclu eulerian.*

Definiţia 9. Un lanţ $(u_{i_1},...,u_{i_q})$ se numeşte *drum* dacă pentru orice **k**, $2 \le k \le q$, extremitatea iniţială a lui u_{i_k} coincide cu extremitatea finală a arcului $u_{i_{k-1}}$; dacă **x** şi **y** sunt extremităţile libere ale drumului, atunci spunem că avem un **x,y**-*drum* şi-l notăm generic cu $D_{x,y}$. Un drum pentru care extremităţile libere coincid se numeşte *circuit*. Drumul $D_{x,y}$ este *simplu* sau *elementar* după cum lanţul corespunzător este simplu sau elementar. Un drum este hamiltonian sau eulerian după cum lanţul corespunzător este hamiltonian sau eulerian.

Exemplul 2. Considerăm graful reprezentat în Fig.2.

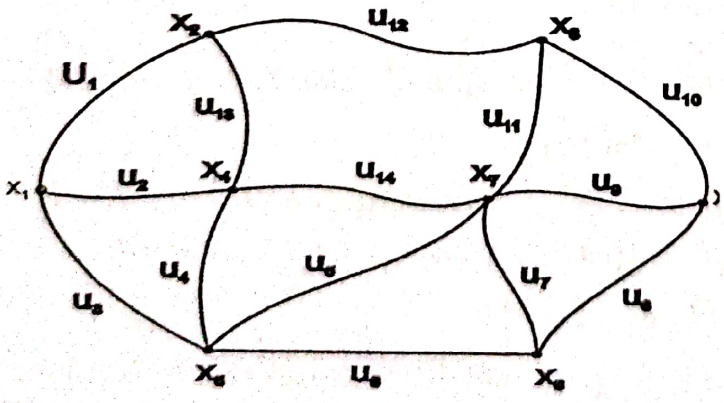


Fig. 2

Lanţul $L_{x_1x_8}$ =(u_2, u_{14}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_9) este de lungime 7, are extremităţile libere x_1 şi x_8 şi foloseşte arcul u_{14} de două ori, deci, implicit,foloseşte vârfurile x_4 şi x_7 de câte două ori; în consecinţă, acest lanţ nu este nici simplu nici

Scanned with OKEN Scanner

elementar. Lanțul $L_{x_4x_6} = (u_{14}, u_9, u_{10}, u_{11}, u_7)$ este simplu dar nu este elementar pentru că folosește de două ori vârful x_7. Un exemplu de lanț și simplu și elementar este lanțul $L_{x_4x_6} = (u_{14}, u_9, u_8, u_6)$.

Lanțul $L_{x_1x_8} = (u_2, u_{14}, u_{11}, u_{10})$ este drum simplu și elementar pentru că, începând cu arcul al doilea, originea unui arc este extremitate pentru arcul precedent. Ca exemplu de ciclu evidențiem lanțul $(u_{14}, u_{11}, u_{12}, u_{13})$, iar ca exemplu de circuit evidențiem drumul (u_6, u_8, u_9, u_5).

Exercițiul 4. Evidențiați în graful din Fig.2 un lanț/drum simplu, un lanț/drum simplu care nu este elementar, un lanț/drum care nu este nici simplu nici elementar, un ciclu și un circuit.

Un graf se numește *conex* dacă orice două vârfuri pot fi unite printr-un lanț. Orice subgraf conex maximal al unui graf se numește *componentă conexă* a acestuia; prin definiție, vârfurile izolate sunt componente conexe. Graful din Fig. 1 are trei componete conexe. (**Identificați-le!**).

2. Arbori și arborescențe

Definiția 10. a) Un graf conex, fără cicluri, care are cel puțin două vârfuri se numește *arbore*. b) Un graf ale cărui componente conexe sunt arbori se numește *pădure*. c) Un arbore care este graf parțial se numește *arbore parțial*.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a arborilor .

Teorema 1. Fie $G = (X, U)$ un graf finit care are cel puțin două vârfuri și $n = \text{card } X = |X| \geq 2$. Următoarele proprietăți sunt echivalente:

1°. G este arbore (graf conex și fără cicluri),

2°. G este fără cicluri și are **n-1** arce,

3°. G este conex și are **n-1** arce,

4°. G nu are cicluri dar dacă se adaugă un arc între orice două vârfuri se formează un ciclu (simplu) și numai unul ,

5°. G este conex , dar dacă se îndepărtează un arc oarecare se obține un graf neconex ,

6°. oricare două vârfuri sunt unite printr-un lanț și numai unul.

Scanned with OKEN Scanner

Această teoremă dă posibilitatea să verificăm uşor dacă un graf este sau nu un arbore.

Teorema 2. Un graf conţine un arbore parţial dacă şi numai dacă este conex.

Definiţia 11. Vârful $a \in X$ se numeşte *rădăcină* a grafului $G = (X, U)$ dacă pentru orice $x \in X$ $(a \neq x)$ există un drum de la a la x (adică orice vârf diferit de a este accesibil din a în lungul unui drum).

Definiţia 12. Graful $G = (X, U)$ se numeşte *cvasi-tare-conex* dacă pentru orice două vârfuri $x, y \in X$, $x \neq y$, există un vârf $z \in X$ astfel încât x şi y sunt accesibile dealungul unor drumuri ce pleacă din z.

Remarca 2. Orice graf cvasi-tare-conex este conex; reciproca nu este adevărată.

Definiţia 13. Orice arbore care are o singură rădăcină se numeşte *arborescenţă*.

Este nevoie să recunoaştem uşor dacă un graf este sau nu o arborescenţă. În acest scop prezentăm următorul rezultat general.

Teorema 3. Fie $G = (X, U)$ un graf orientat finit care are cel puţin două vârfuri şi $n = \text{card } X = |X|$. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:

1°. G este arborescenţă (cvasi-tare-conex şi fără cicluri),

2°. G este arbore cu o singură rădăcină,

3°. G este cvasi-tare-conex şi are $n-1$ arce,

4°. există un vârf $a \in X$, care poate fi unit cu oricare vârf al grafului printr-un singur drum ce pleacă din a,

5°. G este cvasi-tare-conex, dar îşi pierde această calitate dacă se îndepărtează un arc oarecare al său,

6°. G este conex şi există un vârf $a \in X$ astfel încât $|\omega^-(a)| = 0$ şi $|\omega^-(x)| = 1$ pentru orice vârf $x \neq a$,

7°. G nu are cicluri şi există un vârf $a \in X$ astfel încât $|\omega^-(a)| = 0$ şi $|\omega^-(x)| = 1$ pentru orice vârf $x \neq a$.

Dacă $G = (X, U)$ este un graf cvasi-tare-conex, atunci lăsând la o parte, atât cât este posibil, arcele a căror îndepărtare nu modifică proprietatea de cvasi-tare-conexitate, se obţine o arborescenţă.

Scanned with OKEN Scanner

Consecința 1. Graful orientat **G = (X, U)** conține o arborescență dacă și numai dacă este cvasi-tare-conex.

Exercițiul 5. Precizați dacă grafurile din Fig. 1 și 2 sunt sau nu conexe, tare-conexe, cvasi-tare-conexe. Identificați, unde este cazul, câte doi arbori și câte două arborescențe.

§2. Grafuri neorientate

Fie **X** o mulțime nevidă. Definim *perechea neorientată* de extremități **x** și **y** ca fiind submulțimea $\{(x, y), (y, x)\} \subset X \times X$; vom nota cu **[x, y]** perechea neorientată de extremități **x** și **y**.

Definiția 14. a) Un graf neorientat **G** este o pereche **G = (X,U)** formată dintr-o mulțime nevidă **X** ale cărei elemente se numesc **noduri** și o mulțime **U** de perechi neordonate de elemente din **X** ale cărei elemente se numesc **muchii**.
b) Pentru muchia $u=[x, y] \in U$ vârfurile **x** și **y** se numesc *extremități*; se mai spune că vârfurile **x** și **y** sunt *adiacente* sau că **x** și **y** sunt *incidente* muchiei **u**. Un vârf neincident nici-unui arc se numește *vârf izolat*

Pentru orice graf neorientat **G = (X, U)** se pot defini majoritatea noțiunilor introduse pentru grafuri orientate exact în aceeași termeni ca noțiunile omonime. Este vorba de noțiunile: *vârf izolat, graf finit, buclă, muchii paralele, subgraf, graf parțial, lanț, lanț simplu / elementar, ciclu, graf conex, componentă conexă , subgraf generat de o familie de vârfuri / muchii , arbori.*

Exercițiul 6. Dați definițiile noțiunilor enumerate mai sus pentru grafuri neorientate. Enumerați noțiunile de la grafuri orientate pentru care nu există noțiuni omonime la grafuri neorientate.

Fiecărui graf neorientat i se poate asocia o imagine geometrică obținută reprezentând elementele mulțimii prin puncte sau cerculețe mici iar mulțimea muchiilor prin arce simple (fără autointersecții) de curbă.

Exemplul 3. În graful neorientat din Fig. 3 identificăm elementele:

l – este vârf izolat, **[a, a]** – este buclă, $[a, b]_1$ $[a, b]_2$ – muchii paralele,
$L_{a,f} = \{[a, e], [e,c], [c,b], [b, e], [e, f]\}$ este lanț simplu care nu este lanț elementar,
$L_{a,f} = \{[a, e], [e,c], [c,d]\}$ este și lanț simplu și lanț elementar,

Scanned with OKEN Scanner

{[f, c], [e, c], [c, d], [d, f] } este ciclu,
există 4 componente conexe (**Indicați-le!**).

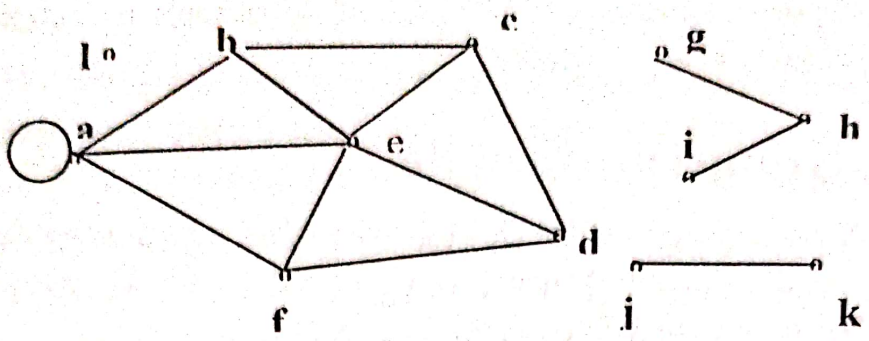


Fig. 3

§3. Probleme de optim în grafuri

Pentru grafurile care apar din probleme concrete se asociază în mod natural caracteristici numerice arcelor sau muchiilor. De exemplu,
- pentru orice rețea de distribuție a energiei electrice fiecărui arc ce leagă un punct de transformare de consumator îi asociem tensiunea maximă admisibilă pe această portiune de rețea,
- pentru rețeaua de drumuri naționale, putem asocia fiecărei muchii/arc ce leagă două localități adiacente fie lungimea în kilometri a acestei muchii fie costul de transport al unității de marfă pe kilometru,
- pentru graful relațiilor dintre întreprinderile economice din țară, fiecărei relații îi asociem beneficiul respectiv pierderea pe relația respectivă; evident, beneficiul se va înregistra printr-un număr pozitiv iar pierderea printr-un număr negativ.

Suntem conduşi să asociem unui graf orientat sau nu, $G = (X, U)$, o funcţie $\ell : U \to \mathbb{R}$ pe care o numim (în mod tradiţional) *funcție lungime* sau *lungime* chiar şi în cazul în care ia şi valori pozitive şi valori negative. Pentru grafuri dotate cu funcție de lungime se pun probleme de optimizare. Astfel de probleme se pot rezolva şi prin metodele programării liniare, dar abordarea lor cu ajutorul metodelor teoriei grafurilor este mai eficientă.

Scanned with OKEN Scanner

1°. Problema arborelui parțial minimal/maximal

Exercițiul 7. Enunțați problema arborelui parțial minimal/maximal. Justificați că pentru grafuri de ordin finit această problemă are totdeauna soluție. Revedeți/ copiați algoritmul lui Kruskal ([1], pag. 188).

Exemplul 4. Să rezolvăm problema arborelui parțial minimal pentru graful neorientat **G = (X, U)** din **Fig 4, a** dotat cu lungimi pozitive evidențiate pe fiecare muchie (ignorați pe moment numerele din paranteze!).

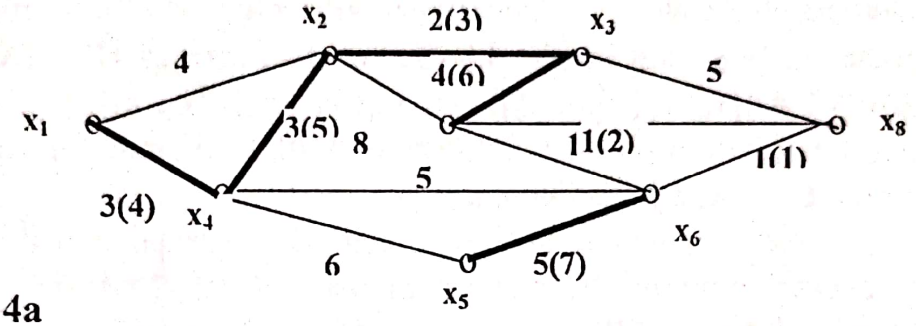


Fig. 4a

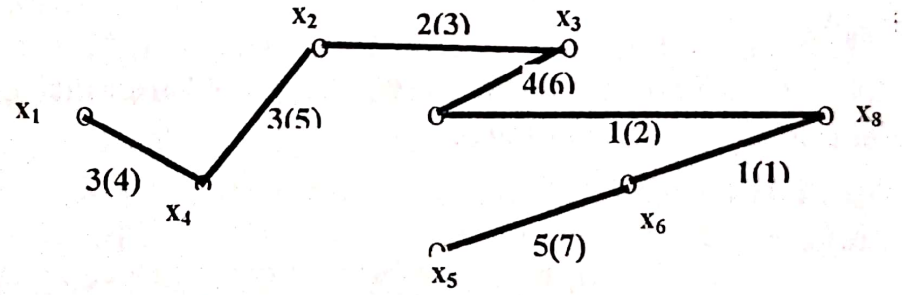


Fig. 4b

Pasul 1. Se ia $u^* = [x_6, x_8]$, $v_1=u^*$, $V_1=\{[x_6, x_8]\}$ și se trece la **Pasul 2.**

Pasul 2. - Se ia $u^* = [x_7, x_8]$, $v_2=u^*$, $V_2=\{[x_6, x_8], [x_7, x_8]\}$ și se reia **Pasul 2.**

- Se ia $u^* = [x_2, x_3]$, $v_3=u^*$, $V_3=\{[x_6, x_8], [x_7, x_8], [x_2, x_3]\}$ și se reia **Pasul 2.**
- Se ia $u^* = [x_1, x_4]$, $v_4=u^*$, $V_4=\{[x_6, x_8], [x_7, x_8], [x_2, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_4]\}$ și se reia **Pasul 2.**
- Se ia $u^* = [x_2, x_4]$, $v_5=u^*$, $V_5=\{[x_6, x_8], [x_7, x_8], [x_2, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_4]\}$ și se reia **Pasul 2.**

Scanned with OKEN Scanner

- Se ia $u^* = [x_3, x_7]$, $v_6 = u^*$, $V_6 = \{[x_6, x_8], [x_7, x_8], [x_2, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_4], [x_3, x_7]\}$ şi se reia **Pasul 2.**
- Se ia $u^* = [x_5, x_6]$, $v_7 = u^*$, $V_7 = \{[x_6, x_8], [x_7, x_8], [x_2, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_4], [x_3, x_7], [x_5, x_6]\}$ şi se reia **Pasul 2.**
- De această dată nu mai există u^* cu proprietăţile indicate la **Pasul 2.ii** al algoritmului, deci algoritmul se opreşte. Soluţia obţinută este arborele parţial $H = (X, V_7)$.

Numărul pus între paranteze reprezintă ordinea alegerii muchiilor: prima muchie aleasă va purta indicele (1), a doua (2), etc.. Îngroşând muchiile alese, se evidenţiază arborele parţial minimal căutat, reprezentat şi separat în **Fig. 4.b**. Se constată uşor că $H' = (X, V')$ pentru care $V' = \{[x_6, x_8], [x_7, x_8], [x_2, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_4], [x_3, x_7], [x_4, x_5]\}$ este tot soluţie a problemei arborelui parţial minimal pentru graful neorientat $G = (X, U)$ din **Fig.4.a.**

Neunicitatea soluţiei se datorează prezenţei mai multor muchii cu aceeaşi lungime. Se poate demonstra că: dacă *muchiile grafului au lungimi distincte două câte două problema are soluţie unică*.

Exerciţiul 8. Determinaţi alt arbore parţial minimal în graful din Fig. 4.a.

O soluţie a problemei arborelui parţial maximal pentru acelaşi graf este reprezentată în **Fig.5.**

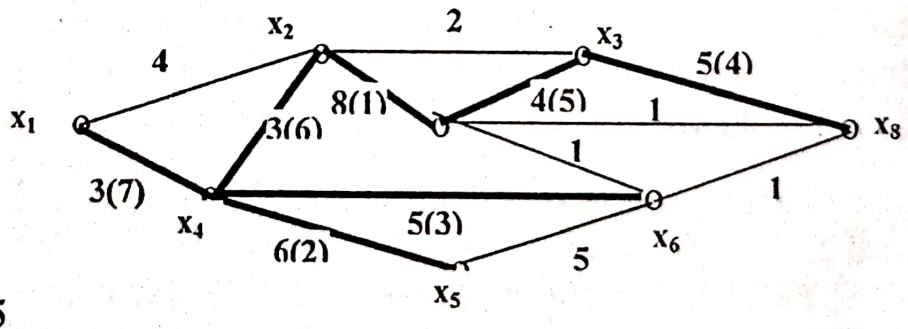


Fig. 5

Şi în rezolvarea problemei arborelui parţial maximal se recomandă să se îngroaşe fiecare muchie aleasă şi să se scrie în paranteze lângă ea numărul care indică numărul alegerii.(vezi **Fig. 5**).

2°. Problema drumului minim/maxim

Exerciţiul 9. Enunţaţi problema drumului minim respectiv a drumului maxim într-un graf orientat sau nu. Justificaţi că pentru grafuri

Scanned with OKEN Scanner

de ordin finit aceste probleme au totdeauna soluţii. Revedeţi/ copiaţi algoritmul I (Dantzig, [1], pag. 188).

Exemplul 4. Să rezolvăm problema drumului minim pentru graful neorientat **G = (X, U)** din **Fig 6.**

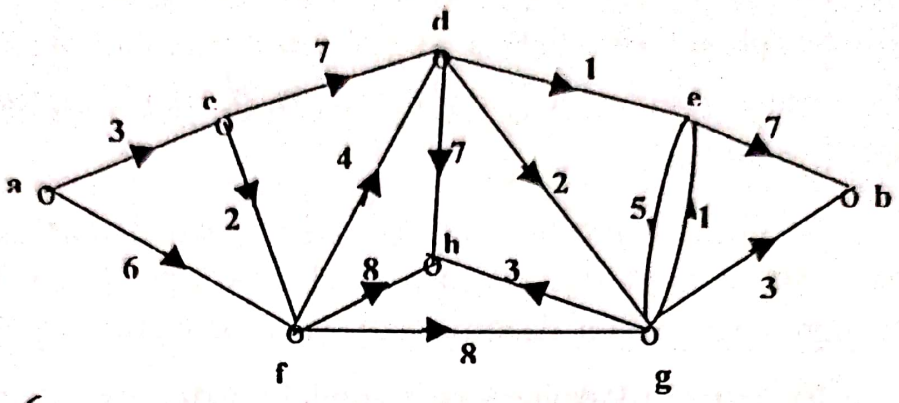


Fig. 6

Pasul 1. $t(a) = 0, X_1 = \{ a \}$.

Pasul 2. $k = 1 : \omega^+(X_1) = \{(a,c),(a,f)\}$, *min* $\{t(a) + \ell(a,c), t(a) + \ell(a,f)\} = min \{0+3, 0+6\} = 3 = t(a) + \ell(a,c)$, adică $u^* = (a,c)$. Deci $y^* = c$, $t(c) = 3, X_2 = \{a,c\}$.

$k = 2 : \omega^+(X_2) = \{(a,f),(c,f),(c,d)\}$, *min* $\{t(a) + \ell(a,f), t(c) + \ell(c,f), t(c) + \ell(c,d)\} = min \{0+6, 3+2, 3+7\} = 5 = t(c) + \ell(c,f)$, adică $u^* = (c,f)$. Deci $y^* = f$, $t(f) = 5, X_3 = \{a, c, f\}$.

$k = 3 : \omega^+(X_3) = \{(f,d), (f,h), (f,g),(c,d)\}$, *min* $\{t(f) + \ell(f,d), t(f) + \ell(f,g), t(c) + \ell(c,d)\} = min \{5+4, 5+8, 3+7\} = 9 = t(f) + \ell(f,d)$, adică $u^* = (f,d)$. Deci $y^* = d$, $t(d) = 9, X_4 = \{a, c, f, d\}$.

$k = 4 : \omega^+(X_4) = \{(d, e), (d, g), (d, h), (f, g), (f, h)\}$, *min* $\{t(d) + \ell(d, e), t(d) + \ell(d, g), t(d) + \ell(d, h), t(f) + \ell(f, g), t(f) + \ell(f, h)\} = min \{9 + 1, 9 + 2, 9 + 7, 5 + 8, 5+8\} = 10 = t(d) + \ell(d, e)$, adică $u^* = (d, e)$. Deci $y^* = e$, $t(e) = 10, X_5 = \{a, c, f, d, e\}$.

$k = 5 : \omega^+(X_5) = \{(d, g), (e, b), (e, g), (f, g),(f, h)\}$, *min* $\{t(d)+ \ell(d, g), t(e) + \ell(e, b), t(e) + \ell(e, g), t(f) + \ell(f, g), t(f) + \ell(f, h)\} = min \{9+2, 10+7, 10 + 1, 5 + 8, 5 + 8\} = 11 = t(e) + \ell(e, g)$, adică $u^* = (e, g)$. Deci $y^* = g$, $t(g) = 11$, $X_6 = \{a, c, f, d, e, g\}$. Evident, eticheta lui **g** se putea determina şi pe baza lui **(d, g)**.

$k = 6 : \omega^+(X_6) = \{(e,b),(g,b)\}$, *min* $\{t(e) + \ell(e,b), t(g) + \ell(g,b)\} = min \{10 + 7, 11 + 3\} = 14 = t(g) + \ell(g,b)$, adică $u^* = (g,b)$. Deci $y^* = b$, $t(b) = 14, X_7 = =\{a, c, f, d, e, g, b\}$.

Scanned with OKEN Scanner

$k=7: \omega^+(X_7)=\varnothing$.

Se trece la **Pasul 3** pentru că procedura de etichetare s-a încheiat.

Pasul 3. Deoarece $b \in X_7$, rezultă că există drum de lumgime minimă $D^*_{a,b}$ între **a** şi **b** având lungimea $\ell(D^*_{a,b})=t(b)=14$. Drumul căutat este $D^*_{a,b}$= **ş(a,c), (c, f), (f, d), (d, e), (e, g), (g,b)Ş.** Având în vedere că la pasul **k=5** eticheta lui **g** se putea determina şi pe baza lui **(d, g)**, rezultă că şi drumul $D^*_{a,b}$= **ş(a,c), (c, f), (f, d), (d, g), (g,b)Ş** este tot soluţie a problemei.

În aplicaţiile practice se obişnuieşte să se pună într-un cerc, lângă fiecare vârf etichetat, eticheta care se calculează pe baza algoritmului şi să se îngroaşe muchia u^* determinată la etapa de lucru respectivă.

Exerciţiul 10. Aplicaţi pe exemplul de mai sus "algoritmul" obţinut din algoritmul I înlocuind peste tot operatorul **minim** cu operatorul **maxim.** Arătaţi că **h** nu are etichetă unică. Se obţine sau nu răspuns la problema drumului maxim pentru acest graf? Ce explicaţie daţi?

Exemplul 5. Vom rezolva problema drumului minim dintre vârfurile **a** şi **b** pentru graful din Exemplul 4, utilizând algoritmul Bellman-Kalaba. În acest scop, mai întâi redenumim vârfurile grafului ca în Fig. 7

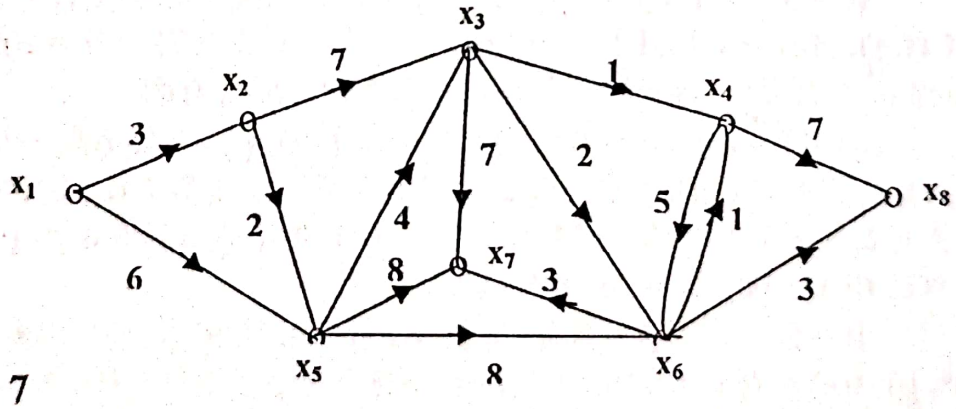


Fig. 7

Construim tabelul

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	3	+∞	+∞	6	+∞	+∞	+∞
x_2	+∞	0	7	+∞	2	+∞	+∞	+∞
x_3	+∞	+∞	0	1	+∞	2	7	+∞

Scanned with OKEN Scanner

x_4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	1	$+\infty$	7
x_5	$+\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$	0	8	8	$+\infty$
x_6	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$	0	3	3
x_7	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
x_8	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$m_i^{(0)}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	7	$+\infty$	3	$+\infty$	0
$m_i^{(1)}$	$+\infty$	$+\infty$	5	4	11	3	$+\infty$	0
$m_i^{(2)}$	17	12	5	4	9	3	$+\infty$	0
$m_i^{(3)}$	15	11	5	4	9	3	$+\infty$	0
$m_i^{(4)}$	14	11	5	4	9	3	$+\infty$	0
$m_i^{(5)}$	14	11	5	4	9	3	$+\infty$	0

Deoarece $m_i^{(4)} = m_i^{(5)}$ rezultă că algoritmul se opreşte. Egalitățile care permit determinarea lui $m_1^{(4)}=14$ sunt

$$\begin{cases} m_1^{(4)} = m_2^{(3)} + \ell_{12} \\ m_2^{(3)} = m_5^{(2)} + \ell_{25} \end{cases} \quad \begin{cases} m_5^{(2)} = m_3^{(1)} + \ell_{53} \\ m_3^{(1)} = m_6^{(0)} + \ell_{36} \end{cases} \quad m_6^{(0)} = \ell_{68} .$$

Un drum minim de la $x_1=a$ la $x_8=b$ este $D_{a,b}^*=\{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_5, x_3), (x_3, x_6), (x_6, x_8)\}$.

Exemplul 6. Vom rezolva problema drumului maxim dintre vârfurile x_1 şi x_8 ale grafului din Fig. 8.

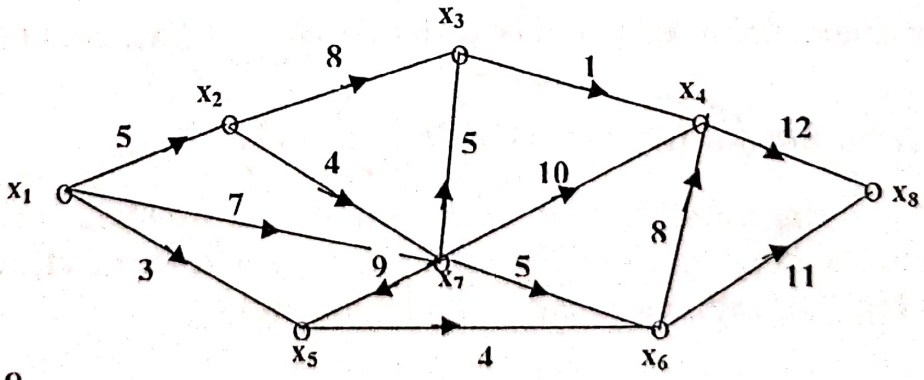


Fig. 8

Construim tabelul următor:

Scanned with OKEN Scanner

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	5	-∞	-∞	3	-∞	7	-∞
x_2	-∞	0	8	-∞	-∞	-∞	4	-∞
x_3	-∞	-∞	0	1	-∞	-∞	-∞	-∞
x_4	-∞	-∞	-∞	0	-∞	-∞	-∞	12
x_5	-∞	-∞	-∞	-∞	0	4	-∞	-∞
x_6	-∞	-∞	-∞	8	-∞	0	-∞	11
x_7	-∞	-∞	5	10	9	5	0	-∞
x_8	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	0
$m_i^{(0)}$	-∞	-∞	-∞	12	-∞	11	-∞	0
$m_i^{(1)}$	-∞	-∞	13	12	15	20	22	0
$m_i^{(2)}$	29	26	13	12	24	20	25	0
$m_i^{(3)}$	32	29	13	12	24	20	33	0
$m_i^{(4)}$	40	37	13	12	24	20	33	0
$m_i^{(5)}$	40	37	13	12	24	20	33	0

Deoarece $m_i^{(4)} = m_i^{(5)}$ rezultă că algoritmul se opreşte. Egalităţile care permit determinarea lui $m_1^{(4)}=40$ sunt

$$\begin{cases} m_1^{(4)} = m_6^{(3)} + \ell_{17} \\ m_6^{(3)} = m_5^{(2)} + \ell_{75} \end{cases} \quad \begin{cases} m_5^{(2)} = m_6^{(1)} + \ell_{56} \\ m_6^{(1)} = m_4^{(0)} + \ell_{64} \end{cases} \quad m_6^{(0)} = \ell_{48}.$$

Un drum minim de la $x_1=a$ la $x_8=b$ este $D^*_{x_1x_8} = \{(x_1, x_7), (x_7, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_4), (x_4, x_8)\}$. În plus, $\ell\left(D^*_{x_1x_8}\right) = 40$.

Exemplul 7. Vom rezolva problema drumului minim pentru graful din Fig. 9.a). În acest scop alegem arborescenţa H_0 reprezentată în Fig. 9.b) care este arbore parţial minimal.

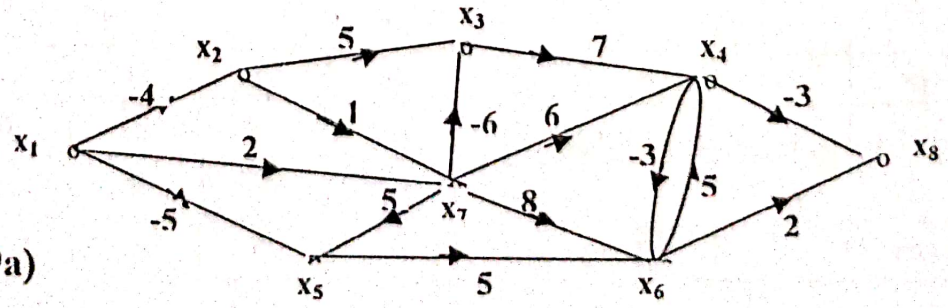


Fig. 9a)

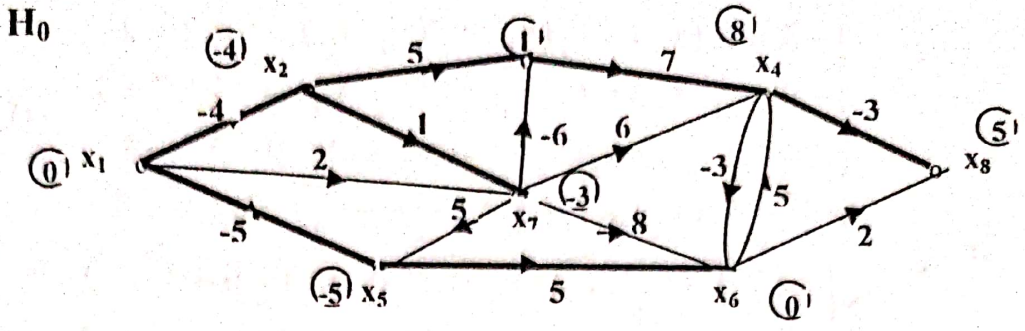


Fig. 9.b)

Arcele neutilizate de H_0 sunt $\{(x_1, x_7), (x_4, x_6), (x_6, x_4), (x_6, x_8), (x_7, x_3), (x_7, x_4), (x_7, x_5), (x_7, x_6)\}$. Au loc relaţiile:

$$\begin{cases} -3 = t_0(x_7) < t_0(x_1) + \ell(x_1, x_7) = 0 + 2 = 2 \\ 0 = t_0(x_6) < t_0(x_4) + \ell(x_4, x_6) = 8 - 3 = 5 \\ 8 = t_0(x_4) < t_0(x_6) + \ell(x_6, x_4) = 0 + 5 = 5 \\ 5 = t_0(x_8) > t_0(x_6) + \ell(x_6, x_8) = 0 - 2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = t_0(x_3) > t_0(x_7) + \ell(x_7, x_3) = -3 - 6 = -9 \\ 8 = t_0(x_4) > t_0(x_7) + \ell(x_7, x_4) = -3 + 6 = 3 \\ -5 = t_0(x_5) < t_0(x_7) + \ell(x_7, x_5) = -3 + 5 = 2 \\ 0 = t_0(x_6) < t_0(x_7) + \ell(x_7, x_6) = -3 + 8 = 5 \end{cases}$$

Alegem $u^* = (x_7, x_3)$ şi construim arborescenţa H_1 reprezentată în Fig. 9.c).

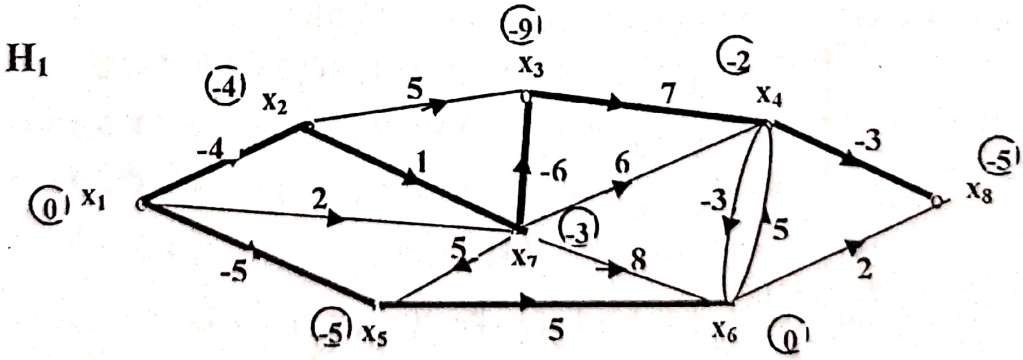


Fig. 9.c)

Arcele neutilizate de H_1 sunt $\{(x_1, x_7), (x_2, x_3), (x_4, x_6), (x_6, x_4), (x_6, x_8), (x_7, x_4), (x_7, x_5), (x_7, x_6)\}$. Au loc relaţiile:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} -3 = t_1(x_7) < t_1(x_1) + \ell(x_1, x_7) = 0 + 2 = 2 \\ -9 = t_1(x_3) < t_1(x_2) + \ell(x_2, x_3) = -4 + 5 = 1 \\ 0 = t_1(x_6) > t_1(x_6) + \ell(x_4, x_6) = 0 - 3 = -3 \\ -2 = t_1(x_4) < t_0(x_6) + \ell(x_6, x_4) = 0 + 5 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 = t_1(x_8) < t_1(x_6) + \ell(x_6, x_8) = 0 - 2 = -2 \\ -2 = t_1(x_4) < t_1(x_7) + \ell(x_7, x_4) = -3 + 6 = 3 \\ -5 = t_1(x_5) < t_1(x_7) + \ell(x_7, x_5) = -3 + 5 = 2 \\ 0 = t_1(x_6) < t_1(x_7) + \ell(x_7, x_6) = -3 + 8 = 5 \end{cases}$$

Alegem $u^*=(x_4, x_6)$ şi construim arborescenţa H_2 reprezentată în Fig. 9.d).

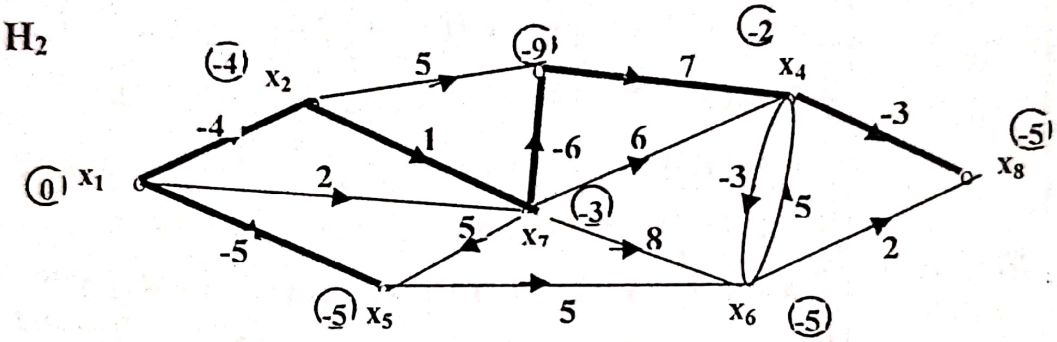


Fig. 9.d)

Arcele neutilizate de H_2 sunt $\{(x_1, x_7), (x_2, x_3), (x_5, x_6), (x_6, x_4), (x_6, x_8), (x_7, x_4), (x_7, x_5), (x_7, x_6)\}$. Au loc relaţiile:

$$\begin{cases} -3 = t_2(x_7) < t_2(x_1) + \ell(x_1, x_7) = 0 + 2 = 2 \\ -9 = t_2(x_3) < t_2(x_2) + \ell(x_2, x_3) = -4 + 5 = 1 \\ -5 = t_2(x_6) < t_2(x_5) + \ell(x_5, x_6) = -5 + 5 = 0 \\ -2 = t_2(x_4) < t_2(x_6) + \ell(x_6, x_4) = -5 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 = t_2(x_8) > t_2(x_6) + \ell(x_6, x_8) = -5 - 2 = -7 \\ -2 = t_2(x_4) < t_2(x_7) + \ell(x_7, x_4) = -3 + 6 = 3 \\ -5 = t_2(x_5) < t_2(x_7) + \ell(x_7, x_5) = -3 + 5 = 2 \\ -5 = t_2(x_6) < t_2(x_7) + \ell(x_7, x_6) = -3 + 8 = 5 \end{cases}$$

Alegem $u^*=(x_6, x_8)$ şi construim arborescenţa H_3 reprezentată în Fig. 9.e).

Scanned with OKEN Scanner

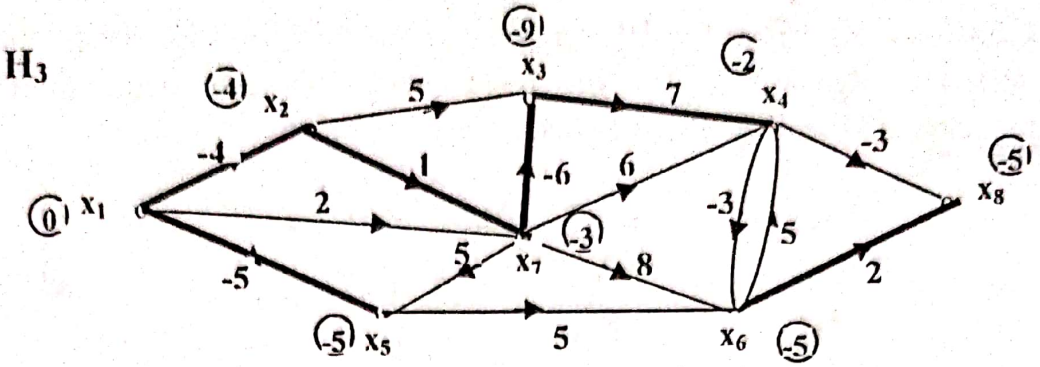


Fig. 9.e)

Arcele neutilizate de H_3 sunt $\{(x_1, x_7), (x_2, x_3), (x_4, x_8), (x_5, x_6), (x_6, x_4), (x_7, x_4), (x_7, x_5), (x_7, x_6)\}$. Au loc relațiile:

$$\begin{cases} -3 = t_3(x_7) < t_3(x_1) + \ell(x_1, x_7) = 0 + 2 = 2 \\ -9 = t_3(x_3) < t_3(x_2) + \ell(x_2, x_3) = -4 + 5 = 1 \\ -7 = t_3(x_8) < t_3(x_4) + \ell(x_4, x_8) = -2 - 3 = -5 \\ -5 = t_3(x_6) < t_3(x_5) + \ell(x_5, x_6) = -5 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = t_3(x_4) < t_3(x_6) + \ell(x_6, x_4) = -5 + 5 = 0 \\ -2 = t_3(x_4) < t_3(x_7) + \ell(x_7, x_4) = -3 + 6 = 3 \\ -5 = t_3(x_5) < t_3(x_7) + \ell(x_7, x_5) = -3 + 5 = 2 \\ -5 = t_3(x_6) < t_3(x_7) + \ell(x_7, x_6) = -3 + 8 = 5 \end{cases}$$

Algoritmul se oprește și $D^*_{x_1x_8} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_7), (x_7, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_6), (x_6, x_8)\}$ este drumul de lungime minimă egală cu –7.

Exemplul 8. Vom rezolva problema drumului maxim pentru graful din figura 10.

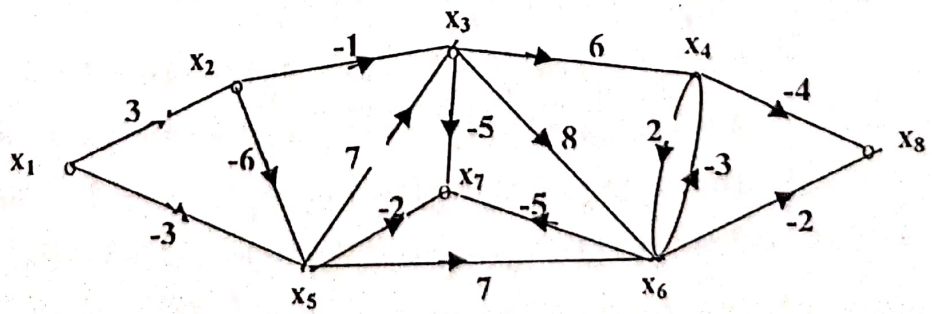


Fig. 10

Conform algoritmului III, trecem la graful din Fig. 11.a) căruia îi aplicăm algoritmul II. În acest scop alegem arborescența H_0 reprezentată în Fig. 11.b) care este arbore parțial minimal.

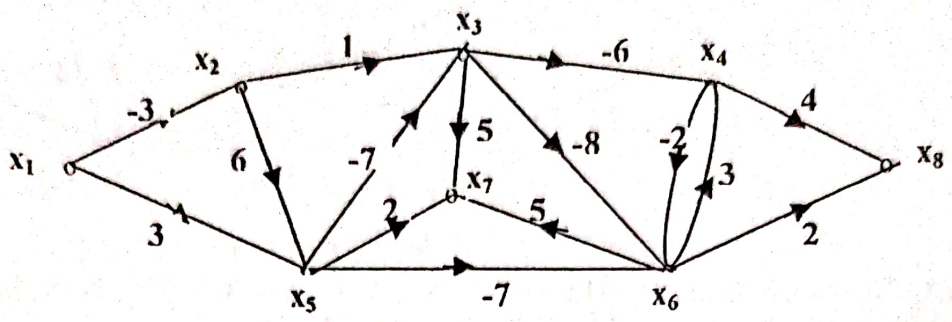


Fig. 11.a)

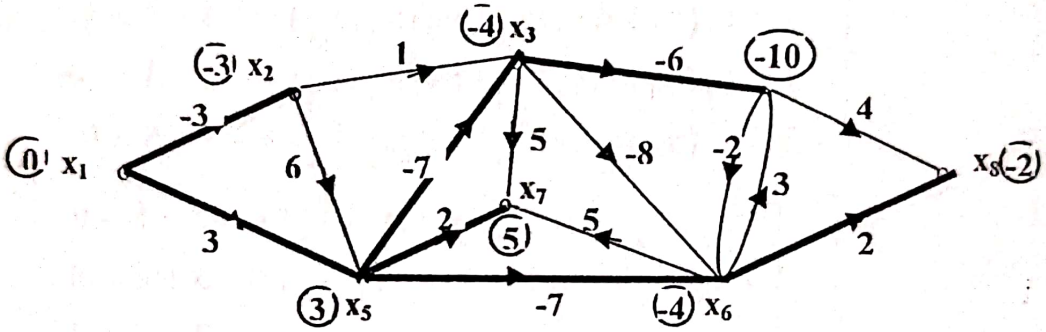


Fig. 11.b)

Arcele neutilizate de H_0 sunt $\{(x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_6), (x_3, x_7), (x_4, x_6), (x_4, x_8), (x_6, x_4), (x_6, x_7)\}$. Au loc relațiile:

$$\begin{cases} -4 = t_0(x_3) < t_0(x_2) + \ell(x_2, x_3) = -3 + 1 = -2 \\ 3 = t_0(x_5) = t_0(x_2) + \ell(x_2, x_5) = -3 + 6 = 3 \\ -4 = t_0(x_6) < t_0(x_3) + \ell(x_3, x_6) = -4 + 8 = 4 \\ 5 = t_0(x_7) > t_0(x_3) + \ell(x_3, x_7) = -4 + 5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = t_0(x_6) < t_0(x_4) + \ell(x_4, x_6) = -10 + 3 = 7 \\ -2 = t_0(x_8) > t_0(x_4) + \ell(x_4, x_8) = -10 + 4 = -6 \\ -10 = t_0(x_4) < t_0(x_6) + \ell(x_6, x_4) = -4 - 2 = -6 \\ -2 = t_0(x_7) < t_0(x_6) + \ell(x_6, x_7) = -4 + 5 = 3 \end{cases}$$

Alegem $u^* = (x_4, x_8)$ și construim arborescența H_1 reprezentată în Fig. 11.c).

Scanned with OKEN Scanner

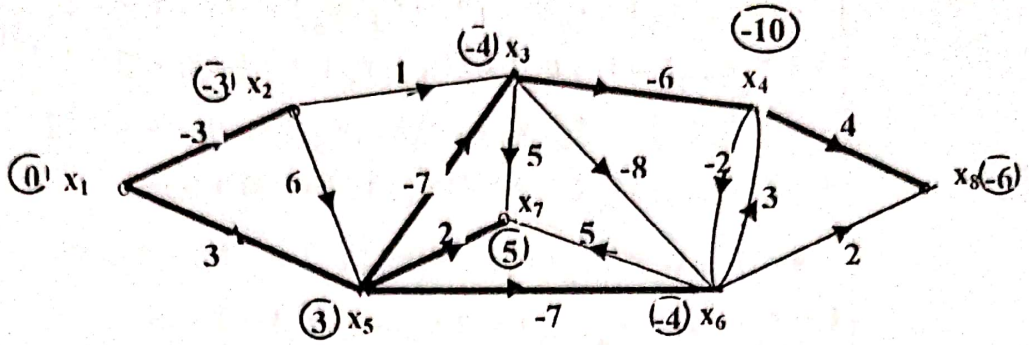


Fig. 11.c)

Arcele neutilizate de H_1 sunt $\{(x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_6), (x_3, x_7), (x_4, x_6), (x_6, x_4), (x_6, x_7), (x_6, x_8)\}$. Au loc relaţiile:

$$\begin{cases} -4 = t_0(x_3) < t_0(x_2) + \ell(x_2, x_3) = -3 + 1 = -2 \\ 3 = t_0(x_5) = t_0(x_2) + \ell(x_2, x_5) = -3 + 6 = 3 \\ -4 = t_0(x_6) > t_0(x_3) + \ell(x_3, x_6) = -4 - 8 = -12 \\ 5 = t_0(x_7) > t_0(x_3) + \ell(x_3, x_7) = -4 + 5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = t_0(x_6) < t_0(x_4) + \ell(x_4, x_6) = -10 + 3 = 7 \\ -10 = t_0(x_4) < t_0(x_6) + \ell(x_6, x_4) = -4 - 2 = -6 \\ 5 = t_0(x_7) > t_0(x_6) + \ell(x_6, x_7) = -4 + 5 = 1 \\ -6 = t_0(x_8) < t_0(x_6) + \ell(x_6, x_8) = -4 + 2 = -2 \end{cases}$$

Alegem $u^* = (x_6, x_7)$ şi construim arborescenţa H_2 reprezentată în Fig. 11.d).

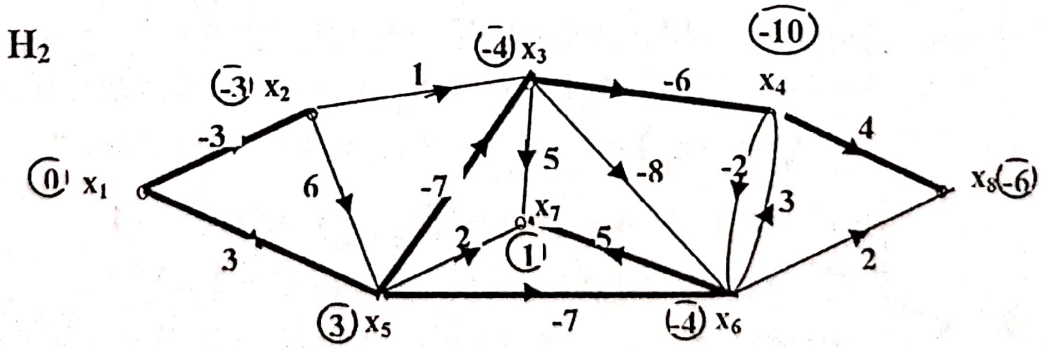


Fig. 11.d)

Arcele neutilizate de H_2 sunt $\{(x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_6), (x_3, x_7), (x_4, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_4), (x_6, x_8)\}$. Au loc relaţiile:

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} -4 = t_0(x_3) < t_0(x_2) + \ell(x_2, x_3) = -3 + 1 = -2 \\ 3 = t_0(x_5) = t_0(x_2) + \ell(x_2, x_5) = -3 + 6 = 3 \\ -4 = t_0(x_6) > t_0(x_3) + \ell(x_3, x_6) = -4 - 8 = -12 \\ 1 = t_0(x_7) = t_0(x_3) + \ell(x_3, x_7) = -4 + 5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = t_0(x_6) < t_0(x_4) + \ell(x_4, x_6) = -10 + 3 = 7 \\ 1 = t_0(x_7) < t_0(x_5) + \ell(x_5, x_7) = 3 + 2 = 5 \\ -10 = t_0(x_4) < t_0(x_6) + \ell(x_6, x_4) = -4 - 2 = -6 \\ -6 = t_0(x_8) < t_0(x_6) + \ell(x_6, x_8) = -4 + 2 = -2 \end{cases}$$

Alegem $u^*=(x_3, x_6)$ şi construim arborescenţa H_3 reprezentată în Fig. 11.e).

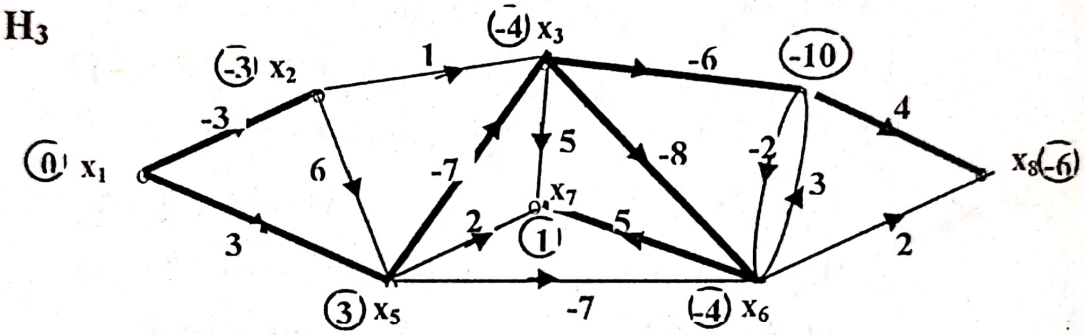


Fig. 11.e)

Arcele neutilizate de H_3 sunt $\{(x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_7), (x_4, x_6), (x_5, x_7), (x_5, x_6), (x_6, x_4), (x_6, x_8)\}$. Au loc relaţiile:

$$\begin{cases} -4 = t_0(x_3) < t_0(x_2) + \ell(x_2, x_3) = -3 + 1 = -2 \\ 3 = t_0(x_5) = t_0(x_2) + \ell(x_2, x_5) = -3 + 6 = 3 \\ -7 = t_0(x_7) < t_0(x_3) + \ell(x_3, x_7) = -4 + 5 = 1 \\ -12 = t_0(x_6) < t_0(x_4) + \ell(x_4, x_6) = -10 + 3 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12 = t_0(x_6) < t_0(x_5) + \ell(x_5, x_6) = 3 - 7 = -4 \\ -7 = t_0(x_7) < t_0(x_5) + \ell(x_5, x_7) = 3 + 2 = 5 \\ -10 = t_0(x_4) > t_0(x_6) + \ell(x_6, x_4) = -12 - 2 = -14 \\ -6 = t_0(x_8) > t_0(x_6) + \ell(x_6, x_8) = -12 + 2 = -10 \end{cases}$$

Alegem $u^*=(x_6, x_4)$ şi construim arborescenţa H_4 reprezentată în Fig. 11.f).

Scanned with OKEN Scanner

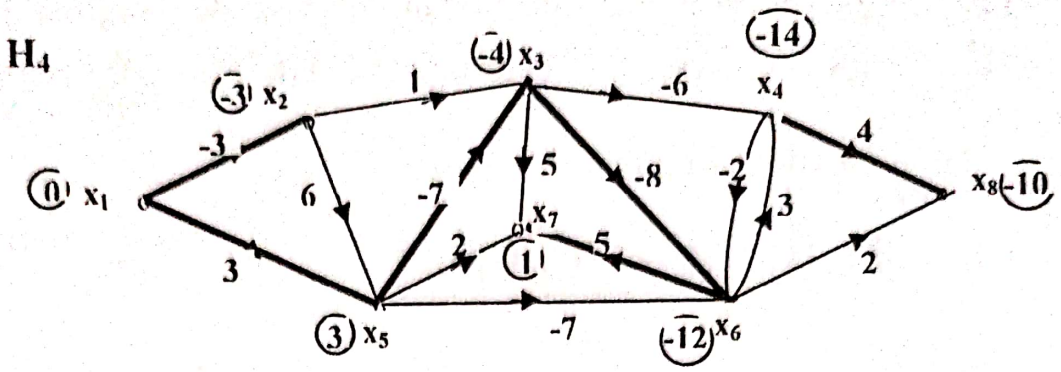


Fig. 11.f)

Arcele neutilizate de H_3 sunt $\{(x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_7), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_8)\}$. Au loc relațiile:

$$\begin{cases} -4 = t_0(x_3) < t_0(x_2) + \ell(x_2, x_3) = -3 + 1 = -2 \\ 3 = t_0(x_5) = t_0(x_2) + \ell(x_2, x_5) = -3 + 6 = 3 \\ -14 = t_0(x_4) < t_0(x_3) + \ell(x_3, x_4) = -4 - 6 = -10 \\ -7 = t_0(x_7) < t_0(x_3) + \ell(x_3, x_7) = -4 + 5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12 = t_0(x_6) < t_0(x_4) + \ell(x_4, x_6) = -14 + 3 = -11 \\ -12 = t_0(x_6) < t_0(x_5) + \ell(x_5, x_6) = 3 - 7 = -4 \\ -7 = t_0(x_7) < t_0(x_5) + \ell(x_5, x_7) = 3 + 2 = 5 \\ -10 = t_0(x_8) = t_0(x_6) + \ell(x_6, x_8) = -12 + 2 = -10 \end{cases}$$

Algoritmul de minimizare pentru graful din Fig. 11.b) se opreşte. Conform indicațiilor algoritmului III, considerăm graful obținut din graful din Fig. 11.f) schimbând semnul lungimilor arcelor; obținem graful din Fig. 11.g).

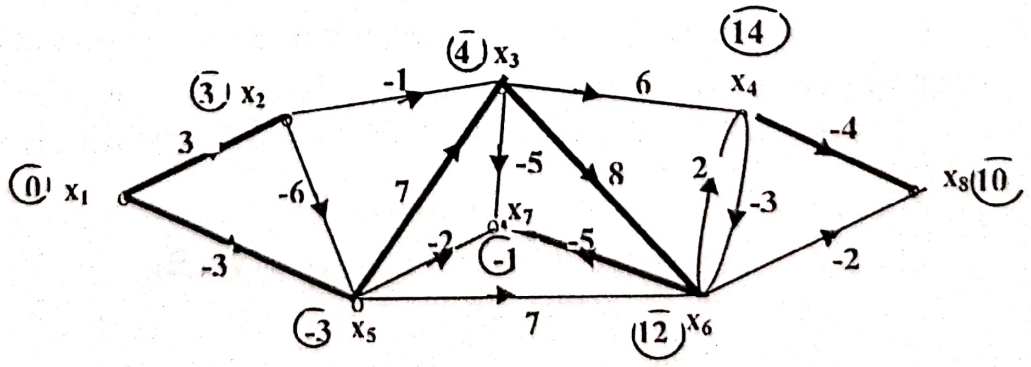


Fig 11g

Fig. 11.g) Pe acest graf identificăm drumul de lungime maximă $D^*_{x_1x_8} = \{(x_1, x_5), (x_5, x_3), (x_3, x_6), (x_6, x_4), (x_4, x_8)\}$, pentru care $\ell\left(D^*_{x_1x_8}\right) = 10 = -t_4(x_8)$.

§4. Rețele de transport

Teoria rețelelor de transport reprezintă un model matematic general pentru rezolvarea problemelor de transport concrete care apar în cele mai diverse situații reale: transportul de clători şi de mărfuri, colectarea apelor reziduale într-un oraş, transportul energiei electrice, transportul informației, transportul sevei într-un copac, tranportul oxigenului într-un organism, etc..

Evident astfel de probleme sunt rezolvate în cadrul programării liniare, dar există procedeie mai eficiente care fac obiectul teoriei *rețelelor de transport*.

Se numeşte *rețea de transport* orice graf orientat dotat cu o funcție de capacitate, o funcție de cost şi o funcție de cerere.

Rezolvarea problemelor specifice rețelelor de transport se face utilizând soluțiile unor probleme mai simple şi anume probleme pentru rețele care au un singur vârf cu disponibil , un singur vârf cu cerere , iar toate celelalte vârfuri sunt vârfuri de tranzit .

Se numeşte *rețea de transport redusă* o rețea de transport cu proprietățile :

- există un singur vârf x_1 care nu este extremitate finală a niciunui arc (adică $T^{-1}x_1 = \varnothing$),
- există un singur vârf x_n care nu este extremitate inițială a niciunui arc (adică $Tx_n = \varnothing$),
- este dată funcția de cerere $d : X \to \mathbb{R}$ definită prin

$$d(x_i) = \begin{cases} -v & \text{dacă } i = 1 \\ 0 & \text{dacă } i \neq 1, n, \\ v & \text{dacă } i = n \end{cases} \qquad v \in \mathbb{R}_+$$

- este dată o funcție de capacitate $k : U \to \mathbb{R}_+$

Fie R o rețea de transport redusă dată prin graful orientat $G = (X,U)$, unde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ şi $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Se numeşte *flux* în reţeaua R orice funcţie $\varphi : U \to \mathbb{R}$ care satisface condiţiile

$$\text{(i)}, \sum_{u_i \in \omega^+(x_h)} \varphi(u_i) - \sum_{u_i \in \omega^-(x_h)} \varphi(u_i) = \begin{cases} v & \text{dacă } h = 1 \\ 0 & \text{dacă } h \neq 1, n \\ -v & \text{dacă } h = n \end{cases}$$

(ii) $\varphi(u_i) \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$

(iii) $\varphi(u_i) \leq k(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Dacă pentru arcul $u \in U$ are loc egalitatea $\varphi(u) = k(u)$, se spune că arcul u este *saturat*. Se spune că un flux într-o reţea de transport redusă este *complet* dacă orice drum de la x_1 la x_n conţine un arc saturat.

Numărul real nenegativ v din definiţia fluxului în reţeaua R, numit şi *aflux*, este un parametru precizat al fluxului şi este notat şi cu $v = v_\varphi$.. Este firesc să intereseze aşa-numita *problemă a fluxului maxim* care constă în: *să se determine, în reţeaua se transport redusă* R, *un flux* φ *pentru care parametrul* $v = v_\varphi$ *are valoare maximă.*

Fie A o mulţime de vârfuri ale reţelei reduse R, astfel încât $x_1 \in A$, $x_n \notin A$.

Se numeşte *secţiune* a reţelei reduse R *determinată de mulţimea* A, mulţimea de arce $\omega^+(A)$. Suma capacităţilor arcelor secţiunii $\omega^+(A)$ se numeşte *capacitatea secţiunii* şi se notează cu $k(\omega^+(A))$ (adică $k(\omega^+(A)) = \sum_{u \in \omega^+(A)} k(u)$).

O alta problemă de interes este aşa-numita *problemă a secţiunii minime.* Ambele probleme menţionate mai sus se rezolvă simultan cu algoritmul Ford-Fulkerson (a se vedea [1] pag. 205).

Exemplul 9. Vom determina fluxul maxim şi secţiunea minimă pentru reţeaua de transport redusă reprezentată în Fig. 12.

Scanned with OKEN Scanner

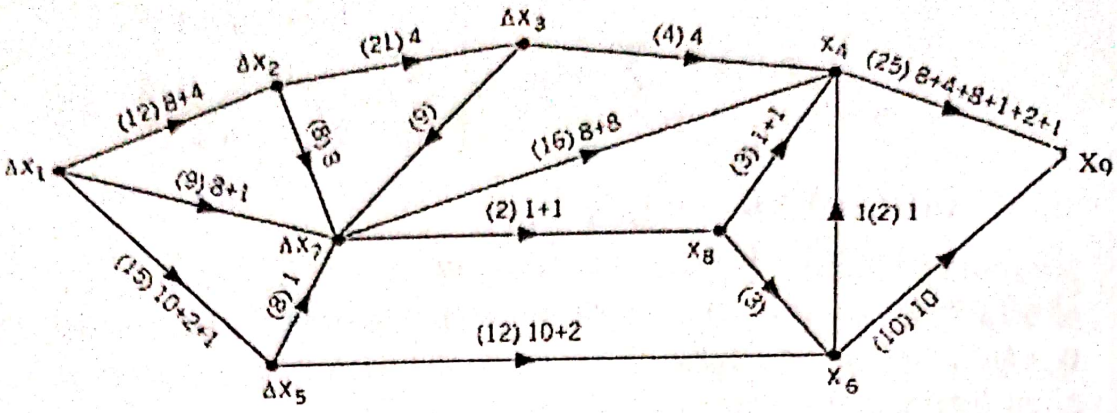


Fig. 12

Se aleg succesiv lanțurile și corecțiile de flux următoare: $L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_7), (x_7, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$,

$\varepsilon = \varepsilon_1 = \min \{12-0, 8-0, 16-0, 25-0\} = 8$,

$L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$,

$\varepsilon = \varepsilon_1 = \min \{15-0, 12-0, 10-0\} = 10$,

$L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$,

$\varepsilon = \varepsilon_1 = \min \{12-8, 21-0, 24-0, 25-8\} = 4$,

$L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_7), (x_7, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$, $= \varepsilon_1 = \min \{9-0, 16-8, 25-12\} = 8$,

$L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_7), (x_7, x_8), (x_8, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$,

$\varepsilon = \varepsilon_1 = \min \{9-8, 2-0, 3-0, 25-20\} = 1$,

$L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$,

$\varepsilon = \varepsilon_1 = \min \{15-10, 12-10, 2-0, 25-21\} = 2$,

$L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_5), (x_5, x_7), (x_7, x_8), (x_8, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$,

$\varepsilon = \varepsilon_1 = \min \{15-12, 8-0, 2-1, 3-1, 25-23\} = 1$

Etichetarea se reduce la mulțimea de vârfuri $A = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_7\}$, ceea ce înseamnă că a fost obținut fluxul maxim de parametru

Scanned with OKEN Scanner

v_{max}=34. Totodată s-a obţinut şi secţiunea minimă $\omega^+(A) = \{(x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_7, x_4), (x_7, x_8)\}$ având capacitatea $k(\omega^+(A)) = 34 = v_{max}$.

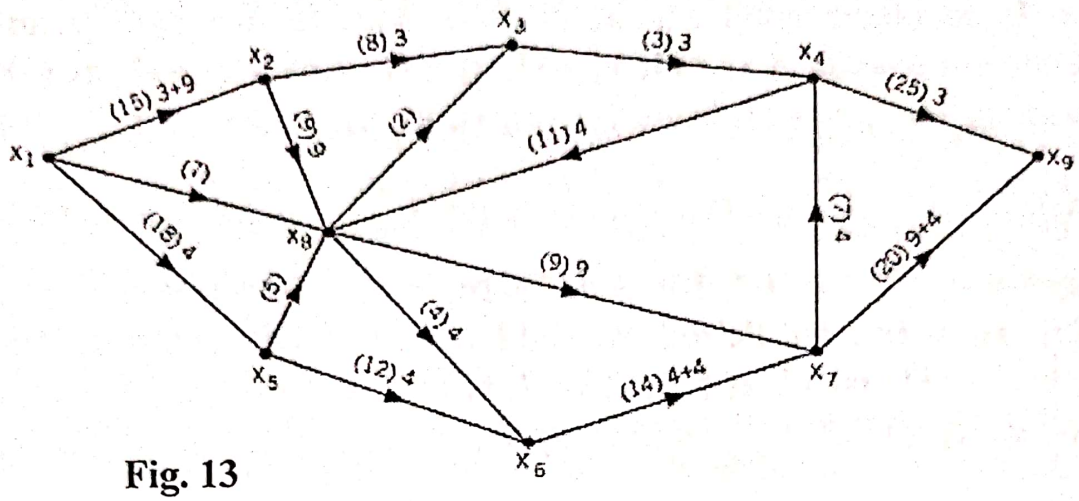


Fig. 13

Vom verifica faptul că numerele puse alături de capacităţi sunt componentele unui flux; ca de obicei, componentele nule ale fluxului nu se înregistrează. Într-adevăr, pentru fiecare punct de tranzit suma cantităţilor de marfă care intră este egală cu suma cantităţilor de marfă care iese din punct. De exemplu, în punctul de tranzit x_6 prin arcele (x_5, x_6), (x_8, x_6) intră cantitatea 4+4 şi iese cantitatea 8 prin arcul (x_6, x_7), iar în punctul x_8 intră 9+4 (prin arcele (x_2, x_8), (x_4, x_8))şi iese aceeaşi cantitate (prin arcele (x_8, x_6), (x_8, x_7)).

Exemplul 11. Vom determina un flux complet pentru graful din Fig. 12. Utilizând procedura obişnuită de marcaj numeric vom asocia la prima etapă mărcile $x_1 \leftrightarrow 1$, $x_2 \leftrightarrow 1$, $x_5 \leftrightarrow 1$, $x_7 \leftrightarrow 1$, $x_3 \leftrightarrow 2$, $x_4 \leftrightarrow 3$, $x_6 \leftrightarrow 5$, $x_8 \leftrightarrow 7$, $x_9 \leftrightarrow 4$. Obţinem lanţul $(x_9, x_4, x_3, x_2, x_1)$ (adică $L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$) şi corecţia de flux $\varepsilon = \varepsilon_1 = \min\{12\text{-}0, 21\text{-}0, 4\text{-}0, 25\text{-}0\} = 4$; se obţine arcul saturat (x_3, x_4). Se reia marcajul vârfurilor. Obţinem marcajele $x_1 \leftrightarrow 1$, $x_2 \leftrightarrow 1$, $x_5 \leftrightarrow 1$, $x_7 \leftrightarrow 1$, $x_3 \leftrightarrow 2$, $x_4 \leftrightarrow 7$, $x_6 \leftrightarrow 5$, $x_8 \leftrightarrow 7$, $x_9 \leftrightarrow 4$ şi lanţul (x_9, x_4, x_7, x_1) (adică $L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_7), (x_7, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$) şi corecţia de flux $\varepsilon = \varepsilon_1 = \min\{9\text{-}0, 16\text{-}0, 25\text{-}4\} = 9$; se obţine arcul saturat (x_1, x_7). Se reia marcajul vârfurilor. Obţinem marcajele x_1

$\leftrightarrow$1, $x_2 \leftrightarrow$1, $x_5 \leftrightarrow$1, $x_7 \leftrightarrow$2, $x_3 \leftrightarrow$2, $x_4 \leftrightarrow$7, $x_6 \leftrightarrow$5, $x_8 \leftrightarrow$ 7, $x_9 \leftrightarrow$4 şi lanţul (x_9, x_4, x_7, x_2, x_1) (adică $L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_7), (x_7, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$) şi corecţia de flux $\varepsilon = \varepsilon_1 =$ **min** {12-4, 8-0, 16-9, 25-13} = 7; se obţine arcul saturat (x_7, x_4). Se reia marcajul vârfurilor. Obţinem marcajele $x_1 \leftrightarrow$1, $x_2 \leftrightarrow$1, $x_5 \leftrightarrow$1, $x_7 \leftrightarrow$2, $x_3 \leftrightarrow$2, $x_4 \leftrightarrow$8, $x_6 \leftrightarrow$5, $x_8 \leftrightarrow$ 7, $x_9 \leftrightarrow$4, lanţul (x_9, x_4, x_8, x_7, x_2, x_1) (adică $L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_7), (x_7, x_8), (x_8, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$) şi corecţia de flux $\varepsilon = \varepsilon_1 =$ **min** {12-11, 8-7, 2-0, 3-0, 25-20} = 1; se obţine arcele saturate (x_1, x_2) şi (x_2, x_7). Se reia marcajul vârfurilor. Obţinem marcajele $x_1 \leftrightarrow$1, $x_5 \leftrightarrow$1, $x_7 \leftrightarrow$5, $x_6 \leftrightarrow$5, $x_8 \leftrightarrow$ 7, $x_4 \leftrightarrow$ 8, $x_9 \leftrightarrow$4 şi lanţul (x_9, x_4, x_8, x_7, x_5, x_1) (adică $L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_5), (x_5, x_7), (x_7, x_8), (x_8, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$) şi corecţia de flux $\varepsilon = \varepsilon_1 =$ **min** {15-0, 8-0, 2-1, 3-1, 25-22} = 1; se obţine arcul saturat (x_7, x_8). Se reia marcajul vârfurilor. Obţinem marcajele $x_1 \leftrightarrow$1, $x_5 \leftrightarrow$1, $x_7 \leftrightarrow$ 5, $x_6 \leftrightarrow$5, , $x_4 \leftrightarrow$ 6, $x_9 \leftrightarrow$6, lanţul (x_9, x_6, x_5, x_1) (adică $L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$) şi corecţia de flux $\varepsilon = \varepsilon_1 =$ **min** {15-1, 12-0, 10-0} = 10; se obţine arcul saturat (x_6, x_9). Se reia marcajul vârfurilor. Obţinem marcajele $x_1 \leftrightarrow$1, $x_5 \leftrightarrow$1, $x_7 \leftrightarrow$ 5, $x_6 \leftrightarrow$5, $x_4 \leftrightarrow$ 6, $x_9 \leftrightarrow$ 4,
lanţul (x_9, x_4, x_6, x_5, x_1) (adică $L_{x_1x_9} = \{(x_1, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_4), (x_4, x_9)\} = L^+_{x_1x_9}$) şi corecţia de flux $\varepsilon = \varepsilon_1 =$ **min** {15-11, 12-10, 2-0, 25 - 22} = 2; se obţine arcul saturat (x_6, x_4). Se reia marcajul vârfurilor. Obţinem marcajele $x_1 \leftrightarrow$1, $x_5 \leftrightarrow$1, $x_7 \leftrightarrow$ 5, $x_6 \leftrightarrow$5, $x_4 \leftrightarrow$ 6. Pentru că x_9 nu mai poate fi marcat algoritmul se opreşte, adică a fost obţinut un flux complet. Pe baza algoritmului Ford-Fulkerson se stabileşte că acest flux este chiar flux maxim. Totodată se determină şi secţiunea minimă.

Exerciţiul 11. Verificaţi că fluxul complet determinat în exerciţiul precedent este flux maxim. Identificaţi apoi secţiunea minimă.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

CÂMPURI DE PROBABILITATE

Teoria probabilităţilor este acea ramură a matematicii care studiază proprietăţile structurilor care modelizează fenomenele în a căror desfăşurare intervine hazardul. Deşi ca teorie matematică se bazează pe o axiomatică care-i permite să se dezvolte într-o manieră autonomă, independentă de realitatea fizică, importanţa ei derivă din aplicaţiile practice la care îşi aduce aportul ca instrument de analiză şi rezolvare a problematicilor specifice. Una dintre cele mai importante aplicaţii ale teoriei probabilităţilor este legată de statistica matematică. Teoria probabilităţilor este instrumentul de bază în dezvoltarea şi motivarea principalelor proceduri ale statisticii matematice; în acest sens, una dintre valenţele ei principale este cea care permite să se precizeze condiţiile în care se poate face extrapolarea la întreaga populaţie a rezultatelor constatate pe un eşantion. În fapt, procedurile de lucru din statistica matematică sunt în esenţă reflectarea în planul realităţii a unor rezultate de teoria probabilităţilor.

Obiectele concrete de studiu ale teoriei probabilităţilor sunt evenimentele. La rândul lor, acestea sunt intrinsec legate de calitatea lor de a se realiza sau nu; teoria probabilităţilor îşi propune să determine o măsură pentru şansa de realizare a fiecărui eveniment de interes. Se poate spune că *probabilitatea unui eveniment este o expresie cuantificată a previziunii de a se produce acel eveniment.*

În cele ce urmează vom face o prezentare care să faciliteze utilizarea teoriei probabilităţilor în rezolvarea unor probleme practice concrete. Mai exact, vom privi evenimentele ca situaţii potenţiale legate de efectuarea unor anumite experienţe.

Scanned with OKEN Scanner

§1. Experienţe aleatoare. Evenimente aleatoare

Experienţă aleatoare

Orice realizare a unui complex de condiţii bine precizate se numeşte *experienţă*. Dacă rezultatul unei experienţe nu poate fi unic determinat prin cunoaşterea condiţiilor de definiţie ale experienţei, se spune că experienţa este *aleatoare*.

Orice realizare a unei experienţe se numeşte *probă*.

Fiecare dintre rezultatele care pot apare în urma efectuării unei experienţe se numeşte *caz posibil*. Mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale unei experienţe E formează *spaţiul de selecţie* asociat experienţei şi se va nota cu Ω.

Exemplul 1.a) În cazul experienţei aruncării zarului pe o suprafaţă plană orizontală, se va nota cu **(i)** rezultatul care constă în apariţia feţei cu **i** puncte la o efectuare a experienţei. Spaţiul de selecţie asociat acestei experienţe este $\Omega = \{(1),(2),(3),(4),(5),(6)\}$.

b) Se încrucişează două plante de Regina nopţii cu flori roz. Plantele obţinute fie au flori albe, fie roz, fie roşii. Deci spaţiul de selecţie este $\Omega = \{$**alb, roz, roşu**$\}$.

Evenimente aleatoare

Se numeşte *eveniment aleator* sau *eveniment* orice situaţie potenţială legată de o experienţă (aleatoare) E, despre care putem spune cu certitudine că s-a creat (s-a realizat) sau nu numai după o efectuare a experienţei.

Cazurile posibile care asigură realizarea unui eveniment **A** se numesc *cazuri favorabile* evenimentului **A**.

De exemplu, apariţia unei feţe cu un număr impar de puncte este un eveniment, deoarece, ca situaţie legată de această experienţă, numai după o aruncare a zarului putem spune dacă a apărut sau nu o faţă cu un număr impar de puncte (adică, dacă acest eveniment s-a realizat sau nu). Vom nota acest eveniment cu **A**; cazurile favorabile evenimentului **A** sunt **(1)**, **(3)** şi **(5)**.

Cu **(i)** vom nota şi evenimentul apariţiei feţei cu **i** puncte la o efectuare a experienţei.

Scanned with OKEN Scanner

Evenimentul cert

Evenimentul care se realizează la orice efectuare a experienței se numește *evenimentul cert* și se notează cu Ω.

Evenimentul imposibil

Evenimentul care nu se realizează la nici-o efectuare a experienței se numește *evenimentul imposibil* și se notează cu $\varnothing$.

Implicația

Dacă evenimentul **B** se realizează la orice probă la care se realizează evenimentul **A** se spune că **B** *este implicat de* **A** sau că **A** *implică* **B**; această situație se notează cu $B \supset A$, respectiv $A \subset B$. Prin urmare, se spune că **A** implică **B** dacă realizarea lui **A** atrage în mod necesar realizarea lui **B**. De exemplu, evenimentul **(3)** implică evenimentul $A=\{(1), (3), (5)\}$.

Oricare ar fi evenimentul **A**, au loc implicațiile: $A \subset A$, $A \subset \Omega$. În plus, dacă $A \subset B$ și $B \subset C$ atunci $A \subset C$. Este util să acceptăm (prin definiție) că pentru orice eveniment **A** are loc implicația $\varnothing \subset A$, adică acceptăm că orice eveniment este implicat de evenimentul imposibil.

Implicația este o relație de ordine pe mulțimea evenimentelor asociate unei experiențe.

Eveniment elementar

Orice eveniment $\neq \varnothing$ care nu este implicat decât de evenimentul imposibil și de el însuși se numește *eveniment elementar*. De exemplu, fiecare eveniment **(i)** este eveniment elementar. Evident, orice eveniment care are un singur caz favorabil este elementar dar există evenimente elementare realizabile prin mai multe cazuri favorabile.

Eveniment compus

Orice eveniment care nu este elementar se numește *eveniment compus*. Prin urmare, un eveniment compus este în mod necesar implicat de un alt eveniment diferit de cel imposibil.

Evenimente egale sau echivalente

Două evenimente sunt *egale* dacă și numai dacă toate cazurile favorabile unuia sunt cazuri favorabile și celuilalt. Prin urmare, se spune

Scanned with OKEN Scanner

că evenimentele **A** şi **B** sunt *egale* sau *echivalente* dacă **A** se realizează ori de câte ori se realizează evenimentul **B** şi reciproc; în acest caz se foloseşte notaţia $A = B$. Evident, relaţia $A = B$ este echivalentă cu perechea de implicaţii: $A \subset B$ şi $B \subset A$.

Contrarul unui eveniment

Evenimentul care se realizează ori de câte ori nu se realizează evenimentul **A** se numeşte *contrarul evenimentului* **A** şi se notează cu $\overline{A}$ sau cu $\neg A$. Au loc afirmaţiile

1°. $\overline{\varnothing} = \Omega, \overline{\Omega} = \varnothing, \overline{(\overline{A})} = A,$

2°. $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$

Reuniunea evenimentelor

Se numeşte *reuniunea* evenimentelor **A** şi **B** evenimentul, notat cu $A \cup B$, care se realizează atunci când, la o efectuare a experienţei, se realizează sau **A** sau **B**. Mulţimea cazurilor favorabile reuniunii a două evenimente este reuniunea mulţimilor cazurilor favorabile celor două evenimente. Prin urmare, $A \cup B$ se realizează dacă la o efectuare a experienţei se realizează cel puţin unul dintre evenimentele **A** sau **B**.

Evenimentul **A** este compus dacă şi numai dacă există evenimentele **B** şi **C** diferite de **A** şi $\varnothing$ astfel încât $A = B \cup C$.

Intersecţia evenimentelor

Se numeşte *intersecţia* evenimentelor **A** şi **B** evenimentul, notat cu $A \cap B$, care se realizează atunci când, la o efectuare a experienţei, se realizează şi **A** şi **B**. Mulţimea cazurilor favorabile intersecţiei a două evenimente este intersecţia mulţimilor cazurilor favorabile celor două evenimente. $A \cap B$ se realizează dacă la o efectuare a experienţei se realizează ambele evenimente **A** şi **B**.

Diferenţa evenimentelor

Se numeşte *diferenţa* evenimentelor **A** şi **B** evenimentul, notat cu $A \setminus B$, care se realizează atunci când, la o efectuare a experienţei, se realizează **A** dar nu se realizează **B**. Rezultă că mulţimea cazurilor favorabile diferenţei a două evenimente este diferenţa mulţimilor cazurilor favorabile celor două evenimente.

Scanned with OKEN Scanner

Diferența simetrică

Evenimentul notat cu $A\Delta B$ definit prin

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

se numește *diferența simetrică* a evenimentelor **A** și **B**.

Evenimente compatibile. Evenimente incompatibile

Două evenimente, asociate aceleiași experiențe *E*, se numesc *compatibile* dacă se pot realiza (simultan) la aceeași efectuare a experienței și se numesc *incompatibile* dacă nu se pot realiza la o aceeași efectuare a experienței. Deci evenimentele **A** și **B** sunt compatibile dacă și numai dacă $A\cap B\neq\varnothing$ și sunt incompatibile dacă și numai dacă $A\cap B=\varnothing$. Prin urmare, două evenimente sunt incompatibile dacă realizarea unuia exclude realizarea celuilalt. Se mai poate spune că două evenimente sunt incompatibile dacă la o efectuare a experienței cel mult unul dintre ele se poate realiza.

În genetica mendeliană apar evenimente reciproc exclusive (incompatibile). De exemplu, fenotipurile dominante și cele recesive pentru o anumită caracteristică sunt reciproc exclusive.

O familie de evenimente sunt două câte două incompatibile dacă intersecția oricăror două dintre ele este evenimentul imposibil, adică la orice efectuare a experienței cel mult unul dintre evenimentele familiei se poate realiza.

Exercițiul 1. La o fermă de vaci o parte dintre animale suferă de mamită, iar celelalte sunt sănătoase. Se extrag succesiv două vaci și se notează cu A_1=evenimentul „prima vacă are mamită", A_2=evenimentul „a doua vacă are mamită". Să se exprime cu ajutorul evenimentelor A_1 și A_2 evenimentele:

A = evenimentul „prima vacă este sănătoasă",
B = evenimentul "cel puțin o vacă este bolnavă",
C = evenimentul "cel puțin o vacă este sănătoasă",
D = evenimentul "ambele vaci sunt bolnave"
E = evenimentul „o vacă este bolnavă și una este sănătoasă".

§2. Algebre Boole de evenimente

Mulțimea evenimentelor asociate unei experiențe formează o *algebră Boole* (vezi Anexa 1 din [2]). Conform *teoremei de reprezentare* (teorema *lui Stone*), pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$ (în particular și

Scanned with OKEN Scanner

pentru orice algebră Boole de evenimente) există o mulţime nevidă X astfel încât $\mathcal{B}$ este izomorfă cu o subalgebră Boole a lui $\mathcal{P}(X)$. În cazul prezentat mai sus, al mulţimii tuturor evenimentelor asociate unei experienţe *E*, ca mulţime X se poate lua spaţiul de selecţie Ω iar izomorfismul, asigurat de teorema lui Stone, este cel care asociază fiecărui eveniment mulţimea cazurilor favorabile care îl realizează (de exemplu, evenimentul A citat anterior se identifică cu {(1),(3), (5))}). Prin urmare, a defini un eveniment A legat de o experienţă *E* este echivalent cu a da o submulţime pe care o notăm tot cu A a spaţiului de selecţie Ω al experienţei; evenimentul A se realizează dacă şi numai dacă rezultatul efectuării experienţei este un element din A. Deci mulţimea evenimentelor asociate experienţei *E* poate fi identificată cu mulţimea $\mathcal{P}(\Omega)$ a lui Ω. Prin acest izomorfism evenimentului cert i se asociază mulţimea $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$ iar evenimentului imposibil i se asociază partea vidă $\varnothing \in \mathcal{P}(\Omega)$ a spaţiului de selecţie (apare deci şi motivaţia pentru notaţiile folosite pentru aceste evenimente). Este de remarcat că dacă evenimentele A şi B se identifică prin acest izomorfism cu submulţimile corespunzătoare ale spaţiului de selecţie, evenimentele $A \cup B$, $A \cap B$ şi $A \setminus B$ se vor identifica corespunzător cu reuniunea, intersecţia şi respectiv diferenţa acestor submulţimi.

§3. Definiţia clasică a probabilităţii

Presupunem că experienţa *E* a fost repetată de **n** ori şi că evenimentul A s-a realizat de **p** ori. Numărul **p** se numeşte *frecvenţa absolută* a evenimentului A în acest set de experienţe şi se mai notează cu $f_a(A)$; numărul $f_r(A) = p/n$ se numeşte *frecvenţa relativă* a evenimentului A.

Exerciţiul 2. Demonstraţi că frecvenţa relativă a evenimentelor legate de experienţa *E* are proprietăţile:

1°. $f_r(\Omega) = 1$, 2°. $0 \le f_r(A) \le 1$, 3°. $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$ dacă A şi B sunt incompatibile, 4°. $f_r(A \setminus B) = f_r(A) - f_r(B)$ dacă B implică A, 5°. $f_r(A \setminus B) = f_r(A) - f_r(A \cap B)$, 6°. $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)$, 7°. $f_r(\complement A) = 1 - f_r(A)$.

Experimental s-a constatat că, în multe situaţii, atunci când numărul **n** de repetări ale experienţei *E* se măreşte, frecvenţele relative se grupează în jurul unei valori P(A) care dă o măsură a şansei de

Scanned with OKEN Scanner

realizare a evenimentului A numită şi *probabilitatea lui* A. În cazul când spaţiul de selecţie este finit iar rezultatele care-l compun au şanse de realizare egale, P(A) este *direct proporţional cu numărul cazurilor favorabile* şi *invers proporţional cu numărul cazurilor posibile*; de aceea este plauzibil să se considere că P(A) este chiar raportul dintre numărul elementelor (=cardinalul) mulţimii cazurilor favorabile evenimentului A (cu care se identifică evenimentul A) şi numărul elementelor (=cardinalul) spaţiului de selecţie (adică numărul cazurilor posibile); deci

$$P(A) = \frac{\textbf{numarul cazurilor favorabile}}{\textbf{numarul cazurilor posibile}}.$$

Cu alte cuvinte, în acest caz, P(A) este chiar frecvenţa relativă de realizare a evenimentului A.

Aceasta este *definiţia clasică* a probabilităţii unui eveniment. Din păcate *această definiţie se aplică numai în cazul ideal când rezultatele posibile ale experienţei au şanse egale de realizare* (se spune în acest caz că aceste rezultate sunt echiprobabile). În situaţiile concrete această definiţie este rareori legal aplicabilă; în mod normal, frecvenţa relativă este doar o estimare a şansei de realizare a evenimentului analizat. De aceea teoria apelează la o definiţie având la bază axiomatica lui Kolmogorov (propusă în anul 1931) care elimină dezavantajul menţionat şi pe care o vom prezenta în cele ce urmează (§5).

Exemplul 2. Un fermier are 10 vaci din care 3 sunt bolnave. Se aleg aleator două vaci. Dorim să determinăm :

a) probabilitatea ca cele două vaci să fie sănătoase,
b) probabilitatea ca cele două vaci să fie bolnave,
c) probabilitatea ca prima vacă să fie sănătoasă şi a doua bolnavă,
d) probabilitatea ca prima vacă să fie bolnavă şi a doua sănătoasă,
e) probabilitatea ca ambele vaci să fie sau sănătoase sau bolnave,
f) probabilitatea ca o vacă să fie sănătoasă iar cealaltă bolnavă.

Vom calcula de fiecare dată numărul cazurilor favorabile şi cel al cazurilor posibile. Deoarece extragerile sunt aleatorii, perechile de animale au şanse egale de a fi alese, deci se poate folosi definiţia clasică a probabilităţii. Este util să reamintim că C_n^k este numărul de submulţimi (neordonate) formate din k elemente distincte ale unei mul-

Scanned with OKEN Scanner

ţimi cu n elemente şi că A_n^k este numărul de submulţimi ordonate formate din k elemente distincte ale unei mulţimi cu n elemente.

a) Fie A_1= evenimentul „cele două vaci sunt sănătoase". În acest caz există $C_7^2 = 21$ cazuri favorabile şi $C_{10}^2 = 45$ cazuri posibile; deci $P(A_1) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.

b) Fie A_2 =evenimentul „cele două vaci sunt bolnave". În acest caz există $C_3^2 = 3$ cazuri favorabile şi $C_{10}^2 = 45$ cazuri posibile; deci $P(A_1) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.

c) Fie A_3 =evenimentul „prima vacă să fie sănătoasă şi a doua bolnavă". În acest caz există $7 \cdot 3 = 21$ cazuri favorabile şi $A_{10}^2 = 90$ cazuri posibile; deci $P(A_3) = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$.

d) Fie A_4 =evenimentul „prima vacă să fie bolnavă şi a doua sănătoasă". În acest caz există $7 \cdot 3 = 21$ cazuri favorabile şi $A_{10}^2 = 90$ cazuri posibile; deci $P(A_3) = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$.

e) Fie A_5 =evenimentul „vacile sunt fie ambele sănătoase fie ambele bolnave". În acest caz există $C_3^2 + C_7^2 = 3 + 21 = 24$ cazuri favorabile şi $C_{10}^2 = 45$ cazuri posibile; deci $P(A_5) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.

f) Fie A_6 =evenimentul „vacile sunt una sănătoasă iar cealaltă bolnavă". În acest caz există $2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$ cazuri favorabile şi $C_{10}^2 = 45$ cazuri posibile; deci $P(A_6) = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$.

§4. Câmp de evenimente

Se consideră experienţa E care are mulţimea nevidă Ω ca spaţiu de selecţie.

Definiţia 1.a) Se numeşte *câmp de evenimente* orice pereche $(\Omega, \mathcal{K})$ unde $\mathcal{K}$ este o familie nevidă de evenimente (asociate experienţei E) având proprietăţile:

1°. dacă $A \in \mathcal{K}$ atunci $\overline{A} \in \mathcal{K}$

2°. dacă $A, B \in \mathcal{K}$ atunci $A \cup B \in \mathcal{K}$

Scanned with OKEN Scanner

b) Se numeşte σ-*câmp de evenimente* orice pereche $(\Omega, \mathcal{K})$ unde $\mathcal{K}$ este o familie nevidă de evenimente (asociate experienţei E) având proprietăţile:

1°. dacă $A \in \mathcal{K}$ atunci $\overline{A} \in \mathcal{K}$,

2°. dacă $(A_n)_{n \in N^*}$, $A_n \in \mathcal{K}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\bigcup_{n \in N^*} A_n \in \mathcal{K}$.

Se constată imediat că $\emptyset, \Omega \in \mathcal{K}$ şi că orice câmp resp. σ-câmp de evenimente este stabil relativ la reuniunile şi intersecţiile finite resp. numărabile de evenimente (adică orice reuniune sau intersecţie finită resp. numărabilă de evenimente din $\mathcal{K}$ este un eveniment din $\mathcal{K}$).

Convenţie. Vom utiliza sintagma **(σ-) câmp de evenimente** în afirmaţiile adevărate atât pentru câmpuri de evenimente cât şi pentru σ-câmpuri de evenimente.

Definiţia 2. Se spune că evenimentele familiei $(A_i)_{i \in I}$ din (σ-) câmpul $\mathcal{K}$ formează un *sistem complet de evenimente pentru* $\mathcal{K}$ dacă

1°. $A_i \neq \emptyset$, $\forall\, i \in I$,

2°. sunt incompatibile două câte două, adică $A_i \cap A_j = \emptyset$ dacă $i \neq j$,

3°. $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Rezultă că orice rezultat al experienţei E realizează unul şi numai unul dintre evenimentele unui sistem complet de evenimente asociat câmpului de evenimente $\mathcal{K}$.

Exemplul 2. Un abator achiziţionează porci pentru sacrificare de la fermele F_1, F_2, F_3 şi F_4 pe care îi pune, până la sacrificare, în acelaşi ţarc. Fie A_i $(i = 1,2,3,4)$ evenimentul ca un porc sacrificat (din ţarc) să provină de la ferma F_i. Familia de evenimente $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ formează un sistem complet de evenimente pentru experienţa care constă în sacrificarea unui porc din ţarc.

Exerciţiul 3. Arătaţi că oricare ar fi evenimentele compatibile, diferite de evenimentul imposibil şi de evenimentul cert, A şi B ale unui (σ)-câmp de evenimente (Ω, K) atunci familia de evenimente $\{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$ este un sistem complet de evenimente.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece în problemele concrete lucrăm de obicei cu câmpuri finite de evenimente, evenimentele elementare sunt frecvent utilizate. De aceea prezentăm câteva **proprietăţi ale evenimentelor elementare** într-un (σ)-câmp de evenimente.

1°. Dacă $A \in \mathcal{K}$ este eveniment elementar iar $B \in \mathcal{K}$ atunci

$$B \subset A \Leftrightarrow \text{sau } B = \emptyset \text{ sau } B = A,$$

2°. $A \neq \emptyset$ este eveniment elementar dacă şi numai dacă pentru orice $B \in \mathcal{K}$ sau $A \cap B = A$ sau $A \cap B = \emptyset$,

3°. două evenimente elementare sunt incompatibile,

4°. familia evenimentelor elementare ale unui câmp de evenimente formează un sistem complet de evenimente pentru câmp,

5°. într-un câmp finit de evenimente orice eveniment diferit de $\emptyset$ este implicat de un eveniment elementar,

6°. într-un câmp finit de evenimente orice eveniment compus este **unic** reprezentat (până la ordine) ca reuniune de evenimente elementare,

7°. într-un câmp finit de evenimente evenimentul cert este reuniunea tuturor evenimentelor elementare

§5. Funcţii de probabilitate

Definiţia 3.a) Se numeşte *funcţie de probabilitate* pe câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ orice funcţie $P: \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ cu proprietăţile:

1°. $P(\Omega) = 1$,

2°. oricare ar fi evenimentele *incompatibile* $A, B \in \mathcal{K}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

b) Se numeşte *funcţie de probabilitate* pe σ-câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ orice funcţie $P: \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ cu proprietăţile:

1°. $P(\Omega) = 1$,

2°. $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(A_n)$, oricare ar fi familia numărabilă de evenimente $A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$, incompatibile două câte două (adică $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$).

c) Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ format din (σ-) câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ şi funcţia de probabilitate P se numeşte (σ-) *câmp de probabilitate*.

Scanned with OKEN Scanner

Propoziţia 1. Funcţia de probabilitate a oricărui (σ-) câmp de probabilitate $(\Omega,\mathcal{K},P)$ are proprietăţile:

1°. $P(\varnothing)=0$,

2°. $P(\overline{A})=1-P(A),\ \forall A\in\mathcal{K}$,

3°. $P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B),\ \forall A,B\in\mathcal{K}$

şi, în particular,

3'. $P(B\setminus A)=P(B)-P(A),\ \forall A,B\in\mathcal{K}$ cu $A\subset B$,

4°. $P(A)\le P(B)$ dacă $A\subset B$ şi $A,B\in\mathcal{K}$,

5°. $0\le P(A)\le 1,\ \forall A\in\mathcal{K}$,

6°. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),\ \forall A,B\in\mathcal{K}$

7°. $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\ldots+$$

$$+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n),\quad \forall A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{K}.$$

8°. $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B),\ \forall A,B\in\mathcal{K}$

9°. $P(\bigcup_{n\in N}A_n)\le\sum_{n\in N}P(A_n)$, cu $A_n\in K$, $\forall n\in N$.

Remarca 2. 1°. Se spune că un eveniment diferit de evenimentul cert se realizează *aproape sigur* sau că este *eveniment aproape sigur* dacă are probabilitatea de realizare **1.** 2°. Se spune că un eveniment diferit de evenimentul imposibil este *eveniment aproape imposibil* dacă are probabilitatea de realizare **0.**

Exemplul 3. Considerăm spaţiul de selecţie $\Omega=\{1, 2, 3, 4\}$ şi câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{A}(\Omega))$. Funcţia $P: \mathcal{A}(\Omega)\to\mathbb{R}_+$, definită prin $P(\varnothing)=0$, $P(\{1\})=0{,}2$, $P(\{2\})=0{,}4$, $P(\{3\})=0{,}1$, $P(\{4\})=0{,}3$, $P(\{1, 2\})=0{,}6$, $P(\{1, 3\})=0{,}3$, $P(\{1, 4\})=0{,}5$, $P(\{2, 3\})=0{,}5$, $P(\{2, 4\})=0{,}7$, $P(\{3, 4\})=0{,}4$, $P(\{1, 2, 3\})=0{,}7$, $P(\{1, 2, 4\})=0{,}9$, $P(\{1, 3, 4\})=0{,}6$, $P(\{2, 3, 4\})=0{,}8$, $P(\{1, 2, 3, 4\})=1$ este funcţie de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{A}(\Omega))$. Trebuie remarcat că evenimentele elementare nu sunt echiprobabile.

Exerciţiul 4. Considerăm câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{A}(\Omega))$ unde $\Omega=\{a, b\}$. Arătaţi că fiecare dintre funcţiile $P_1, P_2, P_3: \mathcal{A}(\Omega)\to\mathbb{R}_+$ unde

Scanned with OKEN Scanner

- $P_1(\{a\})=0, P_1(\{b\})=1,$
- $P_2(\{a\})=\frac{1}{2}, P_2(\{b\})=\frac{1}{2},$
- $P_3(\{a\})=\frac{1}{4}, P_3(\{b\})=\frac{3}{4},$

se pot prelungi la funcţii de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Propoziţia 2 (Kolmogorov). Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un σ-câmp de probabilitate şi $(A_n)_{n\in N}$ cu $A_{n+1}\subset A_n$ un şir descendent de evenimente.

a) Dacă $\bigcap_{n\in N} A_n = \varnothing$ atunci $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$,

b) dacă $\bigcap_{n\in N} A_n = B$ atunci $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(B)$.

Propoziţia 3. Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un σ-câmp de probabilitate şi $(A_n)_{n\in N} \subset \mathcal{K}$ un şir de evenimente. Dacă evenimentul $A\in\mathcal{K}$ are proprietatea $A \subset \bigcup_{n\in N} A_n$, atunci

$$P(A) \le \sum_{n\in N} P(A_n).$$

Remarca 3. În cazul particular când $\Omega = \{e_1,...,e_n\}$, de obicei se consideră $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$ şi se notează cu e_i evenimentele elementare $\{e_i\}$ $(i=1,2,...,n)$. Fie $P: \mathcal{K}\to\mathbb{R}_+$ o funcţie de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{K})$. Dacă evenimentele elementare e_i $(i=1,2,...,n)$ sunt echiprobabile, adică $P(e_1) = P(e_2) =...= P(e_n) = p$, atunci $P(\Omega) = 1 = P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_n) = np$ şi, prin urmare, $p=1/n$. Rezultă atunci că evenimentul $A = \{e_{i_1}, ..., e_{i_k}\}$ are probabilitatea

$$P(A) = P(e_{i_1}) + ... + P(e_{i_k}) = k\cdot p = k\cdot\frac{1}{n}.$$

Se regăseşte în acest caz definiţia clasică a probabilităţii. Având în vedere proprietăţile evenimentelor elementare ale unui câmp finit de evenimente rezultă că este suficient să cunoaştem probabilităţile evenimentelor elementare pentru a şti probabilitatea oricărui eveniment al câmpului.

O astfel de situaţie apare în mod obişnuit în aşa-numitele selecţii aleatoare simple în care fiecare element al unei mulţimi analizate are aceeaşi şansă ca oricare altul să fie ales ca element constitutiv al unui eşantion.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 4. La o fermă de vaci o proporţie **p** de animale sunt infectate cu virusul leucozei bovine enzootice (**L**) ; celelalte, în proporţie de **1-p**, sunt sănătoase ($\overline{L}$). Se extrag, cu revenire (adică, după fiecare extragere animalul este repus în populaţie), **3** animale. Să determinăm care este probabilitatea să găsim cel puţin un animal infectat printre cele trei vaci extrase. Rezultatele posibile (R_i) sunt date în tabelul următor

(R_1)	$\overline{L}\ \overline{L}\ \overline{L}$
(R_2)	$\overline{L}\ \overline{L}\ L$
(R_3)	$\overline{L}\ L\ \overline{L}$
(R_4)	$L\ \overline{L}\ \overline{L}$
(R_5)	$L\ L\ \overline{L}$
(R_6)	$L\ \overline{L}\ L$
(R_7)	$\overline{L}\ L\ L$
(R_8)	$L\ L\ L$

Vom nota tot cu (R_i) şi evenimentul apariţiei rezultatului (R_i), **i=1, 2, ..., n.**

Deoarece cazul general este greu de abordat direct în acest moment ne vom ocupa succesiv de următoarele două cazuri care vor facilita rezolvarea problemei în cazul general:

Cazul 1: p = ½. In acest caz sunt tot atâtea vaci bolnave câte sunt sănătoase. Dacă efectivul fermei este **N** atunci cele opt rezultate au câte $\left(\frac{N}{2}\right)^3$ cazuri favorabile, deci sunt echiprobabile. Rezultă că putem considera că spaţiul de selecţie asociat experienţei este $\{(R_1), (R_2),\ldots,(R_8)\}$. În acest caz $(R_1), (R_2),\ldots,(R_8)$ sunt evenimente elementare echiprobabile şi se poate folosi definiţia clasică a probabilităţii. Notând cu **A** evenimentul ca cel puţin un animal din cele trei extrase să fie bolnav, rezultă

$$P(A) = 7/8.$$

Cazul 2 : p ≠ ½. Dacă, de exemplu, sunt de trei ori mai multe animale sănătoase decât bolnave, adică **p = 0,25**, atunci cele opt rezultate posibile ale extragerilor nu mai sunt echiprobabile. Într-adevăr, pentru R_1 vor fi $\left(\frac{3}{4}\cdot N\right)^3$ cazuri favorabile în vreme ce pentru R_8 vor fi $\left(\frac{N}{4}\right)^3$ cazuri

Scanned with OKEN Scanner

favorabile. În acest caz se pot considera ca evenimente elementare cele N rezultate posibile la o extragere. Pentru acest spaţiu de selecţie se poate folosi definiţia clasică a probabilităţii. Având în vedere că A este contrarul evenimentului B = "*cele trei vaci sunt sănătoase*", va rezulta că

$$P(A) = 1 - P(B)$$

adică $P(A) = 1 - \frac{3^3}{4^3}$.

Un raţionament similar ne va asigura că, pentru un p oarecare, $P(A) = 1 - (1 - p)^3$.

Trebuie notat că aceleaşi evenimente R_i sunt evenimente elementare în primul context ($p = ½$) şi evenimente compuse în celălalt context ($p \neq ½$).

§6. Probabilităţi condiţionate

Noţiunea de *probabilitate condiţionată* este sugerează de următoarea problemă.

Problemă. Se consideră o urnă în care sunt **n** bile identice din care: **a** bile marcate cu litera *A*, **b** bile marcate cu litera *B* şi **c** bile marcate şi cu litera *A* şi cu litera *B*. Dacă A = *evenimentul extragerii unei bile care poartă marca A* iar B = *evenimentul extragerii unei bile care poartă marca B*, se cere să se determine probabilitatea de realizare a evenimentului B în ipoteza că A s-a realizat. Această probabilitate se notează cu $P_A(B)$ sau cu P(B / A). In ipoteza că A s-a realizat, vor fi **a + c** cazuri posibile dintre care **c** sunt cazuri favorabile lui B, deci $P_A(B) = \frac{c}{a + c}$.

Se constată imediat că $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Suntem conduşi să dăm următoarea definiţie care abstractizează situaţia din problema de mai sus.

Definiţia 5. Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un (σ-) câmp de probabilitate şi $A \in \mathcal{K}$ un eveniment având $P(A) \neq 0$.Se numeşte *probabilitatea evenimentului B condiţionată de evenimentul* A numărul notat cu $P_A(B)$ (sau cu P(B/A)) definit prin

Scanned with OKEN Scanner

(1) $$P_A(B) = P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

S-a obținut în acest fel o funcție $P_A : \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$; se demonstrează că $(\Omega, \mathcal{K}, P_A)$ este un câmp de probabilitate (exercițiu!).

Din formula (1) se obține egalitatea

(2) $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) .$$

Dacă și $P(B) \neq 0$, au loc egalitățile

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \Rightarrow \frac{P_B(A)}{P(A)} = \frac{P_A(B)}{P(B)} .$$

adică, „frecvența relativă" de realizare a evenimentului A în ipoteza că B s-a realizat este egală cu „frecvența relativă" de realizare a evenimentului B în ipoteza că A s-a realizat.

Exemplul 5. Una dintre experiențele lui Mendel se referă la încrucișarea mazării homozigote cu flori galbene și verzi. Se știe că la prima generație s-a obținut numai mazăre heterozigotă cu flori galbene. Încrucișând mazărea din prima generație (adică, doi heterozigoți) s-a ajuns la a doua generație la mazăre cu flori galbene și la mazăre cu flori verzi. Ne propunem să determinăm probabilitatea p ca o plantă cu flori galbene din a doua generație să fie heterozigotă. Avem deci de calculat o probabilitate condiționată. Mai exact, dacă notăm

G = evenimentul că planta are flori galbene,
V = evenimentul că planta are flori verzi,
H = evenimentul că planta este heterozigotă,

atunci $p = P_G(H)$. Dacă A și a sunt cele două alele ale genei legate de culoarea florii, există în generația a doua 4 evenimente elementare echiprobabile: AA, Aa, aA, aa. Gena A este dominantă și prin urmare

$$G = \{AA, Aa, aA\} \quad \text{și} \quad H \cap G = \{Aa, aA\} = H.$$

Rezultă că $P(G) = 3/4$, $P(H \cap G) = 1/2$ și $p = \frac{P(H \cap G)}{P(G)} = \frac{2}{3}$.

Definiția 6. Se spune că evenimentele A și B sunt *independente* (sau P-*independente*) dacă

(3) $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) .$$

Scanned with OKEN Scanner

Două evenimente pot fi independente relativ la o funcţie de probabilitate şi dependente relativ la altă funcţie de probabilitate. Deci independenţa evenimentelor nu este o noţiune intrinsecă a evenimentelor în discuţie ci este dependentă de modul de cuantificare a şanselor lor de realizare. Două evenimente independente nu sunt în mod necesar condiţional independente în raport cu orice eveniment.

Exerciţiul 5. În condiţiile Exerciţiului 4 evenimentele (incompatibile) {a} şi {b} sunt independente pentru probabilitatea P_1 dar nu pentru probabilităţile P_2 şi P_3. Evenimentele (compatibile) {a} şi Ω sunt independente pentru P_1, P_2 şi P_3.

Propoziţia 4. Dacă evenimentele A şi B sunt independente atunci

$$P(\overline{A}\cap B) = P(\overline{A})\cdot P(B)\,, \qquad P(A\cap\overline{B}) = P(A)\cdot P(\overline{B})\,,$$
$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\,.$$

Se constată că dacă A şi B sunt independente au loc egalităţile

$$P(B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)\,, \quad P(A) = P_B(A) = P_{\overline{B}}(A)\,.$$

Egalităţi similare au loc şi pentru $\overline{B}$ şi $\overline{A}$. Aceste egalităţi arată că şansa de realizare a lui B sau $\overline{B}$ (resp. A sau $\overline{A}$) nu este afectată de realizarea sau nerealizarea lui A (resp. B)(ceea ce este în concordanţă cu percepţiile noastre relativ la independenţa evenimentelor). Prin urmare, pentru o pereche de evnimente independente, şansa de realizare sau nerealizare a unui eveniment este independentă de realizarea sau nerealizarea celuilalt, ceea ce este în concordanţă cu sensul uzual al noţiunii de independenţă.

Trebuie notat că două evenimente incompatibile care nu au probabilităţile de realizare nule nu sunt independente.

Exemplul 6. Se doreşte să se măsoare valoarea diagnosticului unui examen clinic *E* într-o boală *B*. Acest examen este practicat pe un eşantion de volum **n** format din indivizi clasaţi în prealabil în *bolnavi* (*B*+) şi *sănătoşi* (*B*-) cu ajutorul unui test de referinţă presupus fără eroare de clasificare. Rezultatele experienţei sunt trecute în tabelul

Scanned with OKEN Scanner

		B+ *prezența*	*B-* *absența*	
Examen pozitiv	*E+*	a	b	a+b
Examen negativ	*E-*	c	d	c+d
		a+c	b+d	n=a+b+c+d

Pentru a compara testul *E* cu testul de referință se vor aprecia performanțele sale ca proporție a celor ale testului de referință, adică se va considera raportul $\frac{a}{a+c}$ care este de fapt *P(E+/ B+)*. Se poate da deci tabloul care dă distribuția probabilităților rezultatelor examenului *E* condiționate de *B* și anume

		B+ *prezența*	*B-* *absența*
Condiția		P(*B+*)	P(*B-*)
Examen pozitiv	*E+*	P(*E+/B+*)	P(*E+/B-*)
Examen negativ	*E-*	P(*E-/B+*)	P(*E-/B-*)
Total		*1*	*1*

Se poate considera și tabloul care dă distribuția probabilităților rezultatelor examenului de referință condiționate de *E* și anume

Condiția			*B+* *prezența*	*B-* *absența*	*Total*
Examen pozitiv	*E+*	P(*B+*)	P(*B+/E+*)	*P(B-/E+)*	*1*
Examen negativ	*E-*	P(*B-*)	P(*B+/E-*)	*P(B-/E-)*	*1*

Exemplul 7. Se știe că efectele secundare ale unui medicament survin la **10%** bolnavi. Un veterinar tratează două animale cu acest medicament. Se pune problema să se determine probabilitatea ca cele două animale să aibă efecte secundare. Vom nota cu A = *evenimentul ca primul animal tratat să aibă efecte secundare* și cu B = *evenimentul ca al doilea animal tratat să aibă efecte secundare*. In acest caz se poate

Scanned with OKEN Scanner

presupune că cele două evenimente sunt independente deoarece nu există nici-un motiv ca apariţia efectelor secundare la unul dintre animale să justifice apariţia efectelor secundare la celălalt animal. Dacă C = *evenimentul ca ambele animale tratate să aibă efecte secundare*, atunci $C=A\cap B$ şi $P(C) = P(A\cap B = P(A)\cdot P(B) = 0{,}1\cdot 0{,}1 = 0{,}01$.
Aici s-a ţinut cont că proporţia de bolnavi care au efecte secundare este $p = 0{,}1$ şi p este chiar probabilitatea ca un animal tratat să aibă efecte secundare.

Exemplul 8. In condiţiile exemplului precedent, ne punem problema să determinăm probabilitatea ca cel puţin unul din cele două animale să aibă efecte secundare. Dacă D = *evenimentul ca cel puţin unul din cele două animale tratate să aibă efecte secundare*, rezultă că $D = A \cup B$ şi, prin urmare,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}1 + 0{,}1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}19 .$$

Definiţia 7.a) Se spune că evenimentele $A_i \in \mathcal{K}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ sunt *independente* (în totalitate} dacă pentru orice număr natural k $(2 \le k \le n)$ şi orice numere naturale $i_1, \dots, i_k$ cu $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ are loc egalitatea

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) .$$

b) Două sisteme complete de evenimente $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ şi $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ sunt independente dacă

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j), \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Remarca 4. Dacă n evenimente sunt independente două câte două nu rezultă că cele n evenimente sunt independente. In sprijinul acestei afirmaţii prezentăm *Exemplul lui S.N. Bernstein*. Fie $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un spaţiu de selecţie având cazurile posibile echiprobabile. Rezultă ca se poate defini pe Ω o funcţie de probabilitate cu proprietatea $P(e_i) = \frac{1}{4}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Evenimentele $A = \{e_1, e_2\}$, $B = \{e_1, e_3\}$, $C = \{e_1, e_4\}$ sunt independente două câte două, deoarece

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$
$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4}.$$

Dar evenimentele A, B, C nu sunt independente deoarece

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \quad \text{dar} \quad P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8} .$$

Scanned with OKEN Scanner

Remarca 5. Rezolvarea problemei din Exemplul 4 a fost uşor de făcut pentru că, în condiţiile extragerilor cu revenire, cele trei extrageri sunt independente; independenţa extragerilor implică independenţa oricărei familii $\{A_1, A_2, A_3\}$, unde A_i este eveniment asociat extragerii *i*. In cazul extragerilor fără revenire calculul lui P(A) ar fi mai greu de făcut; ar trebui utilizate *probabilităţile condiţionate* sau ar trebui utilizată aşa-numita *schema bilei nerevenite*, care va fi prezentată mai târziu.

Se spune că două experienţe E_1 şi E_2 sunt independente dacă cunoaşterea rezultatului efectuării uneia dintre ele nu aduce nici-o informaţie asupra rezultatului efectuării celeilalte. Cu alte cuvinte, orice eveniment legat de una dintre experienţe este independent de orice eveniment legat de cealaltă. O definiţie similară se dă pentru n experienţe independente. De exemplu, dacă **n** indivizi dintr-o populaţie apar în urma încrucişării a **n** cupluri diferite, cele **n** experienţe de încrucişare E_1, E_2,..., E_n sunt independente. Mai mult decât atât, dacă **n** indivizi apar ca rezultat a **n** încrucişări ale aceluiaşi cuplu, se va considera că cele **n** experienţe de încrucişare E_1, E_2,..., E_n sunt independente.

Fie Ω spaţiul de selecţie asociat unei experienţe *E*, pentru care există funcţia de probabilitate $p: \mathcal{A}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$. Atunci mulţimea $\Omega^n = \Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega$ (de **n** ori) se poate interpreta ca spaţiul de selecţie al unei experienţe care constă în repetarea experienţei *E* de **n** ori. Funcţia $P: \mathcal{A}(\Omega^n) \to \mathbb{R}_+$ care asociază fiecărui eveniment elementar $\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ numărul $P(\alpha)=p(a_1)p(a_2)\ldots p(a_n)$ se prelungeşte la o funcţie de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{A}(\Omega))$. O astfel de situaţie apare în experienţa aruncării cu (**n**=) 3 zaruri.

Situaţia aceasta se generalizează la cazul a **n** câmpuri de probabilitate $(\Omega_i, \mathcal{K}_i, p_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ asociate la **n** experienţe independente *Ei* $(i=1, 2, \ldots, n)$. Conform teoremei lui Stone evenimentele se identifică cu părţi ale spaţiilor de selecţie, deci se poate vorbi de produsul cartezian al evenimentelor. Pe $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ se defineşte funcţia de probabilitate $P: \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \cdots \times \mathcal{K}_n \to \mathbb{R}_+$ prin $P(A) = p_1(A_1)\, p_2(A_2) \ldots p_n(A_n)$ pentru orice $A=A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \in \mathcal{A}(\Omega)$. Într-adevăr, dacă $(\Omega_i, \mathcal{K}_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sunt câmpuri de evenimente atunci $(\Omega, \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \times \cdots \times \mathcal{K}_n)$ este tot un câmp de evenimente.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 9. Într-o populaţie dialelică, cu reproducere diploidă, indivizii sunt clasaţi după genotipul lor **AA, Aa, aa**. Avem de a face cu spaţiul de selecţie $\Omega=\{A, a\}$ şi funcţia de probabilitate $p:\mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$, $p(\{A\})=½$, $p(\{a\})=½$. Un individ **I** are părinţii de genotipuri **Aa**. Sunt de analizat evenimentele: E_1 = **evenimentul „I are genotipul AA”**, E_2 = **evenimentul „I are genotipul Aa”**, E_3 = **evenimentul „I are genotipul aa”**. Atunci se defineşte ca mai sus funcţia de probabilitate **P** pe mulţimea Ω^2. Rezultă că: $P(E_1)=½\cdot½=¼$, $P(E_2) = 2\cdot½\cdot½ = ½$, $P(E_3) = ½\cdot½ =¼$.

§7. Probabilitatea evenimentelor dependente. Inegalitatea lui Boole

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un (σ-) câmp de probabilitate şi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistem de evenimente care nu sunt independente şi pentru care $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \neq 0$. Utilizând inducţia completă rezultă formula

(4)
$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Această formulă este cunoscută şi sub numele de *formula de înmulţire a probabilităţilor*.

In practică se preferă deseori să se determine un minorant al numărului $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$ determinat prin *inegalitatea lui Boole:*

(5)
$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

Şi această formulă se demonstrează prin inducţie completă.

Exemplul 10. Să comparăm două teste *T* şi *B* pentru paratuberculoza bovină. Pe un lot de **1000** animale s-au obţinut datele din tabelul care urmează.

Scanned with OKEN Scanner

		B+	*B-*	*Total*
	T+	*55*	*175*	*230*
	T-	*45*	*725*	*770*
Total		*100*	*900*	*1000*

Rezultă

$$P(B+) = \frac{100}{1000} = 0{,}10 \qquad P(T+) = \frac{230}{1000} = 0{,}23$$

$$P(T+|B+) = \frac{55}{100} = 0{,}55 \quad P(T+|B-) = \frac{175}{900} = 0{,}1946 \;;$$

deoarece $P(T+/B+)$ şi $P(T+/B-)$ sunt mult diferite rezultă că rezultatul testului T depinde de realizarea sau nerealizarea lui B, adică cele două teste nu sunt independente. Prin urmare, experienţe realizate independent şi pe care le percepem ca independente, nu sunt independente probabilistic (adică între ele există legături care depăşesc posibilităţile obişnuite de analiză şi apreciere).

§8. Formula probabilităţii totale. Formula lui Bayes

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un (σ-) câmp de probabilitate şi $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un sistem complet de evenimente pentru care $P(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Atunci probabilitatea oricărui eveniment $A \in \mathcal{K}$ se determină cu formula

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(A)$$

adică

(6)

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(A) + \ldots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(A).$$

Această formulă se numeşte *formula probabilităţii totale*. Demonstraţia ei este o consecinţă a definiţiei funcţiei de probabilitate, a probabilităţilor condiţionate şi a egalităţilor

$$A = A \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i) \,,$$

$$(A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = \varnothing \,, \text{ pentru } i \neq j \,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementele unui sistem complet de evenimente se interpretează adesea ca fiind cauzele care participă la realizarea evenimentului A. Apare atunci în mod firesc întrebarea: ştiindu-se că evenimentul A s-a realizat, care este contribuţia (ca proporţie) a cauzei A_i la realizarea lui?

Egalitatea

$$P_A(A_i) = \frac{P(A_i)\cdot P_{A_i}(A)}{P(A)} \quad ,$$

şi formula probabilităţii totale conduc la formula

$$P_A(A_i) = \frac{P(A_i)\cdot P_{A_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P_{A_j}(A)} \tag{7}$$

cunoscută sub numele de *formula lui Bayes*.

Probabilităţile $P(A_1)$, $P(A_2)$, ... , $P(A_n)$ se numesc *probabilităţi apriorice* în vreme ce probabilităţile $P_A(A_1)$, $P_A(A_2)$, ... , $P_A(A_n)$ se numesc *probabilităţi aposteriorice.*

Formula lui Bayes este baza unei ramuri a statisticii – statistica bayesiană, care are aplicaţii în medicină, meteorologie, finanţe, etc.. Printre aplicaţiile de uz comun citãm:

- în diagnosticul medical – revizuirea probabilităţii existenţei uneia sau alteia dintre afecţiuni după obţinerea rezultatului unui examen de laborator,
- în meteorologie – la prevederea avalanşelor,
- în riscul financiar – la determinarea gradului de risc de cădere în faliment a unei întreprinderi pe baza analizării anumitor coeficienţi.

Exemplul 11. Reluăm situaţia din Exemplul 2. Pe baza facturilor s-a calculat că *17%* din porcii cumpăraţi sunt de la ferma F_1, *29%* sunt de la ferma F_2, *15%* sunt de la ferma F_3, *39%* sunt de la ferma F_4. De asemenea, pe baza informaţiilor de la achiziţiile anterioare s-a calculat că :

2% din porcii de la ferma F_1 sunt bolnavi de *trichiniloză*
3% din porcii de la ferma F_2 sunt bolnavi de *trichiniloză*
1% din porcii de la ferma F_3 sunt bolnavi de *trichiniloză*
2% din porcii de la ferma F_4 sunt bolnavi de *trichiniloză.*

Scanned with OKEN Scanner

Se sacrifică un porc ales la întâmplare. Se cere :

1° să se calculeze probabilitatea ca porcul sacrificat să fie bolnav ,

2° ştiind că porcul sacrificat a fost bolnav, să se calculeze probabilitatea ca el să provină de la ferma F_2.

1° Notăm cu A evenimentul "*porcul sacrificat este bolnav*". Folosind formula probabilităţii totale rezultă :

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A|A_1) + P(A_2)\cdot P(A|A_2) + \\ + P(A_3)\cdot P(A|A_3) + P(A_4)\cdot P(A|A_4)$$

deci

$$P(A) = 0{,}17\cdot 0{,}02 + 0{,}29\cdot 0{,}03 + 0{,}15\cdot 0{,}01 + 0{,}39\cdot 0{,}02 = 0{,}0214.$$

2° Din formula lui Bayes rezultă

$$P(A_2|A) = \frac{P(A_2 \cap A)}{P(A)}, \quad P(A_2|A) = \frac{0{,}03\cdot 0{,}29}{0{,}0214} = 0{,}4065 .$$

Exemplul 12. Reluăm situaţia din Exemplul 5 a încrucişării mazării cu flori galbene cu mazăre cu flori verzi şi luăm o plantă cu flori galbene din a doua generaţie. Pe lângă notaţiile de acolo notăm cu **D** = evenimentul ca planta să fie homozigotă. Atunci, $P_G(D)=1/3$, $P_G(H) = 2/3$. Vom încrucişa această plantă cu flori galbene cu plante cu flori verzi şi obţinem 5 plante cu flori galbene. Fie **A** evenimentul obţinerii acestor 5 plante. Ne propunem să determinăm probabilitatea ca planta să fie homozigotă. Ţinem cont că dacă planta este homozigotă, cele 5 plante obţinute după încrucişare sunt toate heterozigote şi au florile galbene adică $P_D(A)=1$; dacă planta este heterozigotă, fiecare descendent are şansa ½ de a avea flori galbene iar probabilitatea ca cei 5 descendenţi să aibă florile galbene este de $(½)^5$. Atunci

$$P_A(D) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{32}\right)} \cong 0{,}941 .$$

Atât formula probabilităţii totale cât şi formula lui Bayes se extind la σ-câmpuri de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ pentru care există sisteme complete numărabile de evenimente $(A_n)_{n\in N}$. În acest caz cele două formule devin

Scanned with OKEN Scanner

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P_{A_i}(A), \qquad P_A(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(A)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \cdot P_{A_j}(A)}.$$

§9. Scheme probabilistice clasice

Prin *scheme probabilistice clasice* se înţelege o familie de metode de rezolvare a unor clase de probleme care apar des în aplicaţiile teoriei probabilităţilor.

1°. Schema lui Poisson

Se aplică la rezolvarea următoarei clase de probleme.

Se consideră o experienţă E care constă în efectuarea a n experienţe independente $E_1, E_2, \dots, E_n$. Prin *experienţe independente* înţelegem experienţe ale căror rezultate nu se condiţionează în nici-un fel, adică orice eveniment asociat unei experienţe este independent de orice eveniment asociat oricărei experienţe independente de ea. Mai mult decât atât, dacă evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt asociate experienţelor independente $E_1, E_2, \dots$, respectiv E_n, atunci ele sunt evenimente independente. Fie $A_1, A_2, \dots, A_n$ evenimente asociate experienţelor $E_1, E_2, \dots$, respectiv E_n, având probabilităţile de realizare $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$ ... şi respectiv $p_n = P(A_n)$. Să se determine probabilitatea ca la o efectuare a experienţei E să se realizeze evenimentul A care constă în realizarea a exact k $(0 \le k \le n)$ dintre evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n$.

In rezolvarea acestei probleme se ţine cont de faptul că A este reuniunea tuturor evenimentelor de forma

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{A}_{i_n},$$

unde $\{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n\}$ este o permutare a mulţimii $\{1, 2, \dots, n\}$ cu proprietatea $i_1 < \dots < i_k$, $i_{k+1} < \dots < i_n$. Există C_n^k astfel de evenimente distincte şi incompatibile două câte două. Notând $q_i = 1 - p_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ şi ţinând cont că evenimentele $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}, \overline{A}_{i_{k+1}}, \dots, \overline{A}_{i_n}$ sunt independente rezultă că

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{A}_{i_n}) = p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_k} \cdot q_{i_{k+1}} \cdot \dots \cdot q_{i_n}$$

şi că

$P(A) =$ *coeficientul lui* x^k *din polinomul* $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)..(p_nx + q_n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 13. În condiţiile Exemplului 11, dacă se sacrifică câte un porc de la fiecare fermă, care este probabilitatea să fie sacrificaţi *3* porci sănătoşi şi unul bolnav ? Suntem în cazul schemei Poisson. Deci, dacă notăm cu A evenimentul "*3 porci sunt sănătoşi şi unul bolnav*", P(A) este coeficientul lui x^3 din polinomul

$$(0{,}98x + 0{,}02)(0{,}97x + 0{,}03)(0{,}99x + 0{,}01)(0{,}98x + 0{,}02),$$

adică

$$P(A) = 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}02 + 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}98 + \\ + 0{,}98 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}98 + 0{,}02 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}98 = 0{,}075.$$

Exerciţiul 4. Se dau patru urne U_1, U_2, U_3 U_4 cu compoziţiile

- U_1: **3** bile albe şi **4** bile negre,
- U_2: **2** bile albe şi **5** bile negre,
- U_3: **5** bile albe şi **2** bile negre,
- U_4: **4** bile albe şi **3** bile negre.

Din prima urnă se fac **3** extrageri punându-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă, iar din celelalte urne se face câte o singură extragere. Care este probabilitatea obţinerii sau a **2** bile albe şi una neagră din prima urnă sau a **2** bile albe şi una neagră din următoarele trei urne?

2°. Schema binomială (Bernoulli)

Este cazul particular al schemei Poisson aplicate experienţei *E* pentru care $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$. Notând $q = 1 - p$ rezultă

$$P(A) = \textit{coeficientul lui } x^k \textit{ din polinomul } (px + q)^n = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Comentariu. Se putea renunţa la prezentarea separată a schemei binomiale, deoarece ea este un caz particular al schemei Poisson. Un motiv pentru această prezentare este de natură istorică şi revine la faptul că schema binomială a apărut prima şi, prin urmare, ar fi mai corect de spus că schema Poisson este o generalizare a schemei Bernoulli. Mai important ar fi însă faptul că schema Bernoulli se aplică des în rezolvarea unor probleme modelate în felul următor.

Se consideră o urnă care conţine **a** bile albe şi **b** bile negre. Din această urnă se fac **n** extrageri, punându-se de fiecare dată bila extrasă

Scanned with OKEN Scanner

înapoi în urnă. Să se determine probabilitatea evenimentului A care constă în obținerea exact de k ($0 \le k \le n$) ori a unei bile albe în cele n extrageri.

Evident, fiecare din cele n extrageri se poate considera a fi una din cele n experienţe independente din cazul "*schemei Poisson*".

Deci $P(A) = C_n^k p^k q^{n-k}$, unde $p = \frac{a}{a+b}$ şi $q = \frac{b}{a+b}$.

Deoarece după fiecare extragere bila extrasă se repune în urnă, schema Bernoulli se mai numeşte şi *schema bilei revenite* sau *schema bilei întoarse*. Merită de remarcat faptul că ori de câte ori într-o experienţă ne interesează numai un anumit eveniment care se realizează cu probabilitate cunoscută p, se poate înlocui experienţa cu un model simplificat care este extragerea dintr-o urnă care conţine bile albe şi negre în care p este proporţia de bile albe. Deci, în cazul schemei Poisson se pot considera n urne $U_1, U_2, \dots, U_n$ cu bile albe şi negre în care proporţiile de bile albe sunt respectiv $p_1, p_2, \dots, p_n$, iar A_i este evenimentul extragerii unei bile albe din urna U_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Evident schema binomială se aplică ori de câte ori experienţa de interes constă în repetarea unei anumite experienţe.

Exemplul 14. Revenim la Exemplul 4. Dorim să determinăm probabilitatea ca numai un singur animal ales să fie infectat, ştiind că proporţia de animale bolnave este de trei ori mai mică decât cea de animale sănătoase. Dacă p este proporţia de animale infectate, rezultă că $p = 0{,}25$. Notăm cu A evenimentul ca o singură vacă din cele 4 alese este infectată. Conform schemei Bernoulli

$$P(A) = C_3^1 p q^2 \text{ adică } P(A) = 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}421875 \approx 0{,}42.$$

Exemplul 15. Într-o populaţie dialelică doi părinţi de genotipuri Aa au cinci urmaşi. Se ştie că probabilitatea ca un urmaş să fie recesiv este 0,2. Să determinăm probabilitatea ca $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ copii să fie recesivi. Se obţin rezultatele:

$$P(j=0) = C_5^0 (0{,}2)^0 (0{,}8)^5 = 0{,}3277 \qquad P(j=3) = C_5^3 (0{,}2)^3 (0{,}8)^2 = 0{,}0512$$
$$P(j=1) = C_5^1 (0{,}2)^1 (0{,}8)^4 = 0{,}4096 \qquad P(j=4) = C_5^4 (0{,}2)^4 (0{,}8)^1 = 0{,}0064$$
$$P(j=2) = C_5^2 (0{,}2)^2 (0{,}8)^3 = 0{,}2048 \qquad P(j=5) = C_5^5 (0{,}2)^5 (0{,}8)^0 = 0{,}0003.$$

Exerciţiul 5. Se aruncă o monedă de 10 ori. Se cere să se determine probabilitatea ca:

Scanned with OKEN Scanner

a) să se obţină de trei ori stema,
b) să se obţină stema cel puţin de trei ori,
c) să se obţină stema cel mult de trei ori.

3°. Schema multinomială

Această schemă este o generalizare a schemei binomiale la cazul când urna conţine bile de **m** (>2) culori.

O urnă conţine a_1 bile de culoarea c_1, a_2 bile de culoarea c_2,..., a_m bile de culoarea c_m **(m>2).** Din urnă se extrag $n \le a_1+a_2+\ldots+a_m = N$ bile punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Se cere probabilitatea ca în cele **n** extrageri să obţinem n_1 bile de culoarea c_1, n_2 bile de culoarea c_2,..., n_m bile de culoarea c_m, cu $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$. Dacă A este evenimentul de interes, atunci

$$P(A) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$$

unde $p_i = \frac{a_i}{N}$, $i = 1,2,\ldots,m$ şi $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$.

Exemplul 13. Se consideră un locus dialelic pentru o populaţie panmictică şi infinită de animale. Cele două gene **A** şi **a** au proprietatea că indivizii **AA** şi **Aa** au fenotip normal iar indivizii **aa** mor înainte de maturitate. Se ştie că o proporţie de **p=⅛** indivizi au gena **a.** Se extrag **10** pui din populaţie. Care este probabilitatea evenimentului **B** ca în grupa de pui extrasă să fie **5** indivizi **AA, 3** indivizi **Aa** şi **2** indivizi **aa**? Se stabileşte uşor că, pentru populaţia de pui, $p_1=P(AA)=(⅞)^2$, $p_2=P(Aa)=2\cdot⅛\cdot⅞$ şi $p_3=P(aa)=(⅛)^2$. Atunci

$$P(B) = \frac{10!}{5!3!2!} p_1^5 p_2^3 p_3^2 = 2{,}65.10^{-5} .$$

Exerciţiul 6. O urnă conţine **4** bile roşii, **5** bile galbene şi **6** bile albastre. Se extrag trei bile, punându-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Se cere să se determine probabilitatea ca:

a) cele trei bile să fie albastre,
b) să nu existe nici-o bilă roşie,
c) cele trei bile să fie de culori diferite.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Schema hipergeometrică

Se aplică la rezolvarea următoarei clase de probleme.

Se consideră o urnă U care conține a bile albe și b bile negre. Din această urnă se fac n ($n \le a + b$) extrageri fără a pune bila extrasă înapoi în urnă. Se dorește să se determine probabilitatea evenimentului A care constă în extragerea a α ($0 \le \alpha \le a$) bile albe și a $\beta = n - \alpha$ bile negre. Răspunsul este:

$$P(A) = \frac{C_a^{\alpha} \cdot C_b^{\beta}}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}}.$$

Această schemă se generalizează la cazul unei urne care conține a_1 bile de culoarea c_1, a_2 bile de culoarea c_2,..., a_m bile de culoarea c_m. Se extrag $n<a_1+a_2+...+a_m$ bile fără a pune bila extrasă înapoi în urnă. Se pune problema să se determine probabilitatea evenimentului A care constă în faptul ca în grupa extrasă să avem α_1 bile de culoarea c_1, α_2 bile de culoarea c_2,..., α_m bile de culoarea c_m (cu $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m = n$). Răspunsul este:

$$P(A) = \frac{C_{a_1}^{\alpha_1} \cdot C_{a_2}^{\alpha_2} ... C_{a_m}^{\alpha_m}}{C_{a_1+a_2+...+a_m}^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m}}.$$

Exemplul 14. La ferma de vaci F cu un efectiv de **1000** de vaci **100** suferă de mamită. Dacă sunt analizate **5** vaci alese aleator, care este probabilitatea ca două vaci să fie bolnave iar **3** să fie sănătoase ?

Dacă A este evenimentul ca două vaci din cele **5** alese să sufere de mamită, aplicând schema hipergeometrică rezultă

$$P(A) = \frac{C_{100}^{2} \cdot C_{900}^{3}}{C_{1000}^{5}}.$$

Exercițiul 7. O urnă conține **8** bile roșii, **7** bile galbene și **10** bile albastre. Se extrag simultan **5** bile. Care este probabilitatea să se obțină două bile roșii, două bile galbene și o bilă albastră?

§10. Aplicație în Biologie

Se știe că dacă se încrucișează două plante de Regina Nopții cu flori roz se vor obține plante care au flori albe, roz sau roșii. Aceste rezultate sunt legate de cele trei genotipuri **AA**, **Aa** și **aa** corespun-

Scanned with OKEN Scanner

zătoare celor trei combinații posibile ale celor două alele **A** și **a** ale genei care dă culoarea florii. Dacă se face un studiu analog pentru mazărea cu flori galbene și verzi se constată că heterozigoții **Aa** au flori galbene, la fel cu homozigoții **AA** de care nu pot fi distinși decât printr-un studiu suplimentar. Să determinăm mai întâi probabilitatea **p** ca o plantă obținută prin încrucișarea a doi heterozigoți (din a doua generație) să fie heterozigotică. Vom considera evenimentele:

- **G**=evenimentul că florile sunt galbene,
- **V**=evenimentul că florile sunt verzi
- **H**=evenimentul că planta este heterozigotică,
- **D**=evenimentul că planta este homozigotică.

Având în vedere faptul că în a doua generație spațiul de selecție este $\Omega=\{AA, Aa, aA, aa\}$, $G=\{AA, Aa, aA\}$, $D=\{AA, aa\}$ și $V=\{AA\}$ rezultă $H\cap G=H=\{Aa, aA\}$ și $D\cap G=\{AA\}$. Atunci

$$p=P(H|G)=\frac{P(H\cap G)}{P(G)}=\frac{2}{3}$$

(iar $q=P(D|G)=\frac{1}{3}$).

Pentru a stabili dacă planta este sau nu homozigotică s-a încrucișat cu **5** plante cu flori verzi și s-au obținut (în generația a 3-a) **5** plante cu flori galbene. Dacă planta este homozigotică cu flori galbene, adică are genotipul **AA**, cele 5 plante obținute prin încrucișare (cu plante cu flori verzi, adică de genotip **aa**) sunt toate heterozigotice (deci au flori galbene) și prin urmare, $P(A|D)=1$. În cazul în care planta este homozigotică, probabilitea ca un descendent să aibă flori galbene este ½ și deci probabilitatea ca toate cele 5 flori să fie galbene este (conform schemei Bernoulli) de $(½)^5$, adică $P(A|H)=(½)^5$. Conform formulei lui Bayes se obține

$$P(D|A)=\frac{P(D)P(A|D)}{P(D)P(A|D)+P(H)P(A|H)}=\frac{16}{17}\cong 0{,}941\ .$$

Deci, cu o marjă de eroare de **5,9%**, se poate accepta că planta este homozigotică. Pentru micșorarea marjei de eroare era necesar să se mărească numărul de încrucișări cu plante cu flori verzi.

Exercițiul 8. Se consideră un locus dialelic într-o populație presupusă infinită și panmictică. Cele două gene **A** și **a** au proprietățile:

- indivizii **AA** și **Aa** au fenotipuri normale,

Scanned with OKEN Scanner

- inivizii **aa** mor înainte de maturitate.

Se cere:

1. calculaţi în funcţie de frecvenţa relativă **p** a genei **a** frecvenţa de indivizi **AA** şi **Aa** în populaţia adultă,

2. calculaţi în funcţie de frecvenţa relativă **p** a genei **a** frecvenţa de indivizi **AA**, **Aa** şi **aa** în populaţia de copii,

3. calculaţi probabilitatea ca într-un grup de trei copii să fie $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ copii bolnavi.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

VARIABILE ALEATOARE

Prin variabilă aleatoare se înțelege o mărime care ia valori numerice legate de rezultatul unei experiențe aleatoare. Astfel de exemple sunt: numărul de zile cu precipitații dintr-un an într-o anumită localitate, numărul de urmași recesivi care apar în urma încrucișării a doi părinți heterozigoți dintr-o populație, numărul de purcei la o fătare pentru scroafele dintr-o fermă, etc..

Vom preciza obiectul matematic care modelizează astfel de mărimi.

§1. Definiții. Exemple

Fie $(\Omega, \mathcal{K})$ un (σ-) câmp de evenimente.

Definiția 1. Se numește *variabilă aleatoare* (v.a.) orice funcție $\xi:\Omega \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ are loc

(1) $M_1(a) = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) > a\} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \xi^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{K}$.

Exemplul 1. 1°. Orice funcție constantă $\xi:\Omega \to \mathbb{R}$, cu $\xi(\omega) = k$, $\forall \omega \in \Omega$ (k fiind un număr real fixat) este variabilă aleatoare; această variabilă aleatoare o vom nota tot cu k.

2°. Pentru orice eveniment $A \in \mathcal{K}$ funcția caracteristică χ_A definită prin

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{daca} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{daca} \quad \omega \notin A \end{cases},$$

este variabilă aleatoare.

Propoziția 1. Funcția $\xi:\Omega \to \mathbb{R}$ este variabilă aleatoare dacă și numai dacă satisface una dintre următoarele trei condiții echivalente:

1°. $M_2(a) = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leq a\} \in \mathcal{K}, \forall\, a \in \mathbb{R}$,

2°. $M_3(a) = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \geq a\} \in \mathcal{K}, \forall\, a \in \mathbb{R}$,

3°. $M_4(a) = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < a\} \in \mathcal{K}, \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Consecință. Dacă ξ este variabilă aleatoare atunci $M_5(a) = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = a\} \in \mathcal{K}$.

Convenție. In cele ce urmează ne vor fi de folos notațiile:

(2) $$M_1(a) = (\xi > a),\ M_2(a) = (\xi \le a),\ M_3(a) = (\xi \ge a),$$
$$M_4(a) = (\xi < a),\ M_5(a) = (\xi = a).$$

Utilizând Propoziția 1 se demonstrează rezultatul următor.

Propoziția 2. Dacă ξ și η sunt două variabile aleatoare pe (σ-) câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ atunci $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < \eta(\omega)\}$, $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le \eta(\omega)\}$ și $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = \eta(\omega)\}$ sunt evenimente.

Teorema 1. Dacă $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de variabile aleatoare pe (σ-) câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \in \mathbb{R}, \quad \forall \omega \in \Omega$$

atunci funcția $\xi:\Omega \to \mathbb{R}$, definită prin

(3) $$\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega), \quad \forall\ \omega \in \Omega$$

este variabilă aleatoare. În acest caz se spune că șirul de v.a. $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge punctual* la v.a. ξ.

Remarca 1. Se pot defini variabile aleatoare cu valori complexe; funcția $\xi:\Omega \to \mathbb{C}$, pentru care $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ se numește *variabilă aleatoare cu valori complexe* dacă ξ_1 și ξ_2 sunt variabile aleatoare. Funcția vectorială $\xi:\Omega \to \mathbb{R}^n$ pentru care $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, se numește *vector aleator* dacă componentele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt variabile aleatoare. De exemplu, funcția $\xi:\Omega \to \mathbb{R}^2$ care ia ca valori greutatea la naștere și înălțimea la greabăn pentru viței fătați într-o fermă este un vector aleator definit pe mulțimea vacilor gestante din fermă.

Dacă $\xi:\Omega \to \mathbb{R}$ este variabilă aleatoare pe (σ-) câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se poate determina probabilitatea cu care ξ ia o anumită valoare; aceasta este deosebirea esențială dintre o funcție oarecare și o variabilă aleatoare cu același domeniu de definiție.

Definiția 2. Se spune că variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ definite pe (σ-) câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ sunt *independente* dacă pentru orice sistem de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sistemul de evenimente $\{(\xi_1 < a_1), (\xi_2 < a_2), \ldots, (\xi_n < a_n)\}$ este independent.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 3. Orice variabilă aleatoare pentru care mulțimea valorilor este cel mult numărabilă se numește *variabilă aleatoare de tip discret* sau *v.a. discretă.*

Variabilei aleatoare discrete ξ care are mulțimea valorilor $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ îi putem asocia sistemul complet de evenimente $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, unde $A_n = (\xi = x_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; acest sistem se va numi *sistemul complet de evenimente asociat v.a.* ξ. Invers, orice sistem complet de evenimente $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este sistem complet de evenimente asociat unei v.a.. Fie η o altă variabilă aleatoare discretă cu mulțimea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ca mulțime a valorilor și cu sistemul complet de evenimente asociat $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dacă ξ și η sunt v.a. independente, atunci

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)\cdot P(B_j),\ \forall\, i,j\in\mathbb{N}.$$

Cu ajutorul unei funcții continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se poate construi o nouă v.a. $\zeta = f(\xi, \eta)$ care ia valorile $\zeta_{ij} = f(x_i, y_j)$ și are sistemul complet de evenimente asociat $\{C_{ij} = A_i \cap B_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$; în particular,

- dacă $f(x, y) = x + y$, atunci $\zeta = \xi + \eta$ ia valorile $\zeta_{ij} = x_i + y_j$, $\forall$ $i,j \in\mathbb{N}$
- dacă $f(x, y) = x - y$, atunci $\zeta = \xi - \eta$ ia valorile $\zeta_{ij} = x_i - y_j$, $\forall$ $i,j\in\mathbb{N}$.
- dacă $f(x, y) = x \cdot y$, atunci $\zeta = \xi \cdot \eta$ ia valorile $\zeta_{ij} = x_i \cdot y_j$, $\forall$ i,j $\in\mathbb{N}$
- dacă $f(x, y) = x / y$ $(y\neq 0)$, atunci $\zeta = \xi / \eta$ $(\eta\neq 0)$ ia valorile $\zeta_{ij} =$ x_i / y_j, $\forall$ $i,j \in\mathbb{N}$

Definiția 4. Orice v.a. discretă care ia un număr finit de valori distincte se numește *v.a. simplă.*

Așa cum am remarcat deja, pentru fiecare v.a. cunoaștem atât valorile pe care aceasta le ia cât și probabilitățile cu care ia aceste valori. Se obișnuiește să se asocieze fiecărei v.a. discrete ξ care ia valorile $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ un tablou de forma:

$$(4)\qquad \xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix} \text{ sau } \xi : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}\ i \in \mathbb{N}^*$$

unde $p_i = P(A_i)$. Cum $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un sistem complet de evenimente, egalitatea $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ implică:

Scanned with OKEN Scanner

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \ (0 \le p_i \le 1, i \in \mathbb{N}^*).$$

Tabloul (4), care satisface condiţia (5), se numeşte fie *tabloul de repartiţie* sau *tabloul de distribuţie* (sau *distribuţia* v.a.) al v.a. ξ, fie *legea de probabilitate* a v.a. ξ; ultima denumire este legată de posibilitatea introducerii unei funcţii de probabilitate pe mulţimea valorilor v.a.. Dacă v.a. ξ este simplă atunci tabloul său de repartiţie are forma

(4') $$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \text{ sau } \xi : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

şi este satisfăcută condiţia

(5') $$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \ (0 \le p_i \le 1, i=1,2,\ldots,n)..$$

Tabloul (4') împreună cu condiţia (5') sugerează următoarea interpretare: se consideră că în punctele de abscise $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt plasate cantităţile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de materie, adică avem un sistem de puncte materiale, de masă totală 1 cu ponderile $p_1, p_2, \ldots$ şi respecrtiv p_n. O interpretare similară se dă şi pentru v.a. discrete care nu sunt v.a. simple. Această interpretare se poate utiliza pentru a da interpretări mecanice ale unor caracteristici numerice ale unei v.a..

Exemplul 2. 1°. Tabloul de repartiţie al v.a. constante k este

$$k : \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix},$$

iar cel al v.a. χ_A este

$$\chi_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

unde $p = P(A)$, iar $q = 1 - p$.

2°. V.a. ξ care ia ca valori numărul de puncte care apar la aruncarea unui zar are tabloul de repartiţie

$$\xi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Este important de semnalat următorul rezultat: pentru orice v.a. pozitivă ξ există un şir crescător de v.a. simple pozitive care converge punctual la ξ.

Dacă ξ este v.a. simplă de mai sus, mulţimea *Im* ξ a valorilor ei se poate dota cu o funcţie de probabilitate P_ξ: *Im* $\xi \to \mathbb{R}_+$ definită prin

$$P(\{x_i\}) = P(X=x_i) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x_i\}) = P(\xi^{-1}(x_i)),\ i=1, 2, ..., n.$$

Definiţia se extinde imediat pentru v.a. discrete. Mai mult decât atât, se extinde pentru orice v.a. cu mulţimea valorilor $\mathbb{R}$. Într-adevăr, dacă $\mathcal{B}$ este algebra Boole generată de intervalele axei reale, se defineşte funcţia de probabilitate P_ξ pe (σ)-câmpul $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ prin

$$P_\xi(B) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\}) = P(\xi^{-1}(B)).$$

Această funcţie de probabilitate se numeşte *legea de probabilitate* a v.a. ξ. Pentru o v.a. discretă ξ, legea P_ξ este constituită din masele punctuale p_i. P_ξ se poate reprezenta printr-o diagramă în batoane. De exemplu, pentru v.a. ξ care ia ca valori suma numerelor care apar la aruncarea unei perechi de zaruri, atunci legea de repartiţie este

$$\xi : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Legea de probabilitate P_ξ se reprezintă grafic prin diagrama următoare:

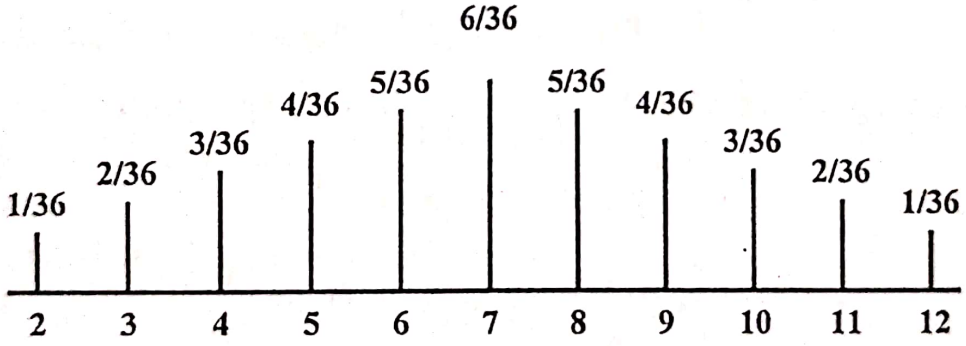


Fig. 1

Un alt exemplu este legea corespunzătoare v.a. ξ care ia valoarea 1 sigur sau aproape sigur, adică $P(\xi=a) = 1$. Ea este cunoscută şi sub numele de **măsura Dirac** şi se notează cu δ_a. Avem deci

$$\delta_a(A) = P_\xi(A) = \begin{cases} 1 & \text{daca } a \in A \\ 0 & \text{daca } a \notin A \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

§2. Operații cu variabile aleatoare

Variabilele aleatoare sunt funcții reale (sau complexe) și de aceea operațiile cu v.a. privite ca funcții reale conduc tot la funcții; în fapt, aceste operații cu v.a. conduc tot la v.a.. Intr-adevăr, are loc teorema următoare.

Teorema 2. Dacă ξ și η sunt două variabile aleatoare pe (σ-) câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ iar $k, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ atunci vor fi variabile aleatoare și următoarele funcții :

$$\xi + \eta, \xi - \eta, \xi \cdot \eta, \xi / \eta \text{ (dacă } \eta \neq 0), \xi + k, k\xi, |\xi|^{\alpha}.$$

Dacă ξ și η sunt v.a. simple (resp. discrete) având tablourile de repartiție

$$\xi : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} \quad \text{și respectiv} \quad \eta : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}$$

cu $i = 1, 2, \ldots, n$ și $j = 1, 2, \ldots, m$ și cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ și $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$, atunci

definim v.a. $\xi + \eta, \xi - \eta, \xi \cdot \eta, \xi / \eta$ (dacă $\eta \neq 0$), $\xi + k, k\xi, \xi^n$ și $|\xi|^{\alpha}$ prin :

$$\xi + \eta : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \xi - \eta : \begin{pmatrix} x_i - y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix},$$

$$\xi \cdot \eta : \begin{pmatrix} x_i \cdot y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \xi / \eta : \begin{pmatrix} x_i / y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix},$$

(6)

$$\xi + k : \begin{pmatrix} x_i + k \\ p_i \end{pmatrix}, k\xi : \begin{pmatrix} k \cdot x_i \\ p_i \end{pmatrix},$$

$$\xi^n : \begin{pmatrix} x_i^n \\ p_i \end{pmatrix}, \quad |\xi|^{\alpha} : \begin{pmatrix} |x_i|^{\alpha} \\ p_i \end{pmatrix}$$

unde $p_{ij} = P(C_{ij}) = P(A_i \cap B_j)$ cu $i = 1, 2, \ldots, n$ și $j = 1, 2, \ldots, m$.

Remarca 2. Dacă $a = x_i + x_j = x_p + x_q$ atunci valoarea a apare în tabloul de repartiție al v.a. $\xi + \eta$ cu probabilitatea $p_{ij} + p_{pq}$. La fel se procedează ori de câte ori apare o astfel de situație când operăm cu v.a..

Scanned with OKEN Scanner

Remarca 3. Operaţiile definite prin (6) nu coincid cu operaţiile obişnuite dintre două funcţii reale. Intr-adevăr, în general $\xi + \xi \neq 2\xi$, $\xi - \xi \neq 0$ şi $\xi \cdot \xi \neq \xi^2$. Este suficient să verificăm acest lucru pentru două v.a. independente care au tabloul de repartiţie

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Intr-adevăr, afirmaţia este evidenţiată de tablourile de repartiţie următoare :

$$\xi + \xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix}, \quad 2\xi : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ q & p \end{pmatrix},$$

$$\xi - \xi : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ pq & p^2+q^2 & pq \end{pmatrix}, \quad 0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şi respectiv

$$\xi \cdot \xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^2+2pq & p^2 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

§3. Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare

Fie $\xi:\Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare pe (σ-) câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ şi $A \in \mathcal{K}$ cu $P(A) \neq 0$.

Definiţia 5. a) Se numeşte *funcţia de repartiţie a v.a.* ξ funcţia $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

(7) $$F_\xi(x) = P(\xi < x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) Funcţia $F_\xi(\cdot|A) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

(8) $$F_\xi(x|A) = P(\xi < x|A), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

se numeşte *funcţia de repartiţie a v.a.* ξ *condiţionată de evenimentul* A.

Convenim ca atunci când nu există pericol de confuzie să scriem F în loc de F_ξ.respectiv $F(\cdot|A)$ în loc de $F_\xi(\cdot|A)$.

Exemplul 3. 1°. Funcţia de repartiţie a v.a. constante k este

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{daca} \quad x \leq k \\ 1 & \text{daca} \quad x > k \end{cases}.$$

Graficul acestei funcţii este cel din Fig. 2.

Scanned with OKEN Scanner

2°. Funcţia de repartiţie a v.a. simple $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ asociată evenimentului A este

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{daca} \quad x \leq 0 \\ q & \text{daca} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{daca} \quad x > 1 \end{cases}$$

Graficul acestei funcţii este cel din Fig. 3.

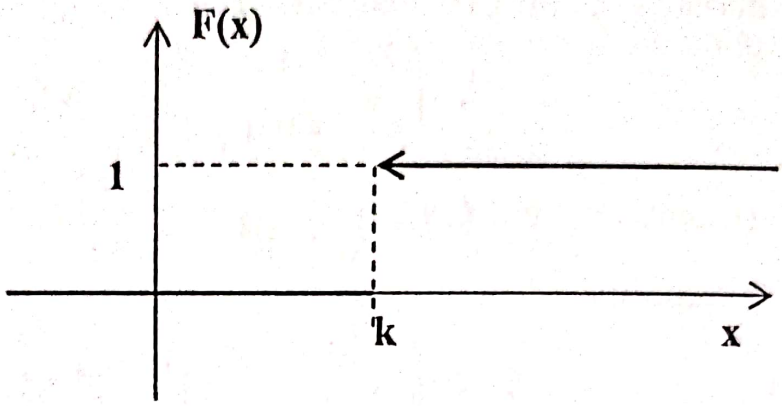


Fig. 2

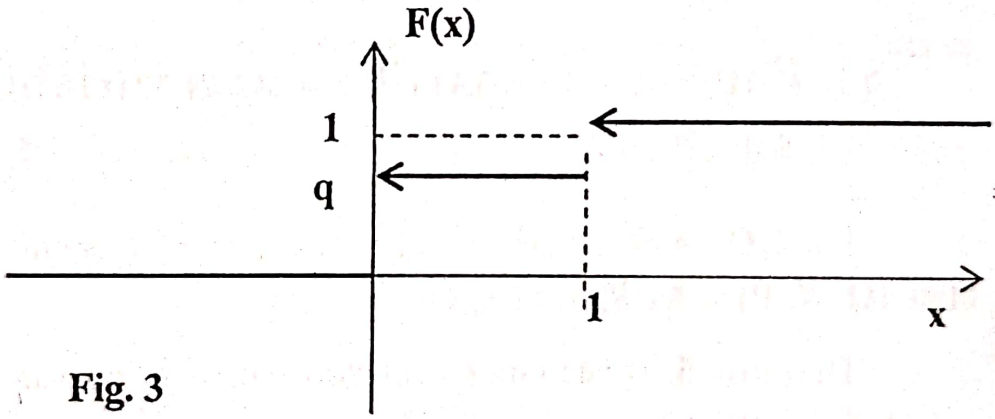


Fig. 3

3°. Funcţia de repartiţie a v.a. simple $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ având tabloul de repartiţie

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

este

Scanned with OKEN Scanner

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{daca } x\le x_1\\ p_1 & \text{daca } x_1<x\le x_2\\ p_1+p_2 & \text{daca } x_2<x\le x_3\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\quad \dots\dots\dots\dots\dots\\ p_1+p_2+\dots+p_{n-1} & \text{daca } x_{n-1}<x\le x_n\\ 1 & \text{daca } x\ge x_n\end{cases}$$

Funcția de repartiție F a v.a. ξ are proprietățile:

P_1. F este nedescrescătoare (adică dacă $x_1 < x_2$ atunci $F(x_1) \le F(x_2)$),

P_2. F este continuă la stânga în orice $x \in \mathbb{R}$ (adică $F(x) = F(x - 0)$, $\forall$ $x \in \mathbb{R}$),

P_3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$,

P_4. $P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$

$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) - P(\xi = a)$

$P(a < \xi \le b) = F(b) - F(a) + P(\xi = b) - P(\xi = a)$

$P(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a) + P(\xi = b)$

P_5. F este continuă în x dacă şi numai dacă $P(\xi = x) = 0$.

Proprietatea P_4 evidențiază cel mai bine importanța funcției de repartiție.

Aceste proprietăți sunt *caracteristice* funcțiilor de repartiție ale variabilelor aleatoare în sensul că fiecare funcție de repartiție a unei v.a. are aceste proprietăți şi orice funcție cu aceste proprietăți este funcție de repartiție a unei v.a.. Pot însă exista mai multe v.a. (chiar independente) care au aceeaşi funcție de repartiție.

În fapt, orice funcție monoton crescătoare, continuă la stânga şi astfel încât $F(-\infty)=0$ şi $F(+\infty) = 1$ defineşte o lege de probabilitate unică pe $\mathbb{R}$ prin relațiile:

$$P((-\infty,a))=F(a),\quad P([a,b))=F(b)-F(a),\quad P(\{a\})=F(a+)-F(a).$$

Fiind monotonă, funcția de repartiție F are o familie cel mult numărabilă de discontinuități de specia I-a, adică limita la dreapta într-un punct de discontinuitate există şi este finită. Dacă x_0 este punct de discontinuitate pentru F atunci

$$P(X = x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0,\eta\to 0} P(x_0 - \varepsilon < X < x_0 + \eta) = F(x_0 + 0) - F(x_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, pentru o v.a. simplă care ia valorile x_i cu probabilitățile p_i ($i=1, 2, ..., n$), legea de probabilitate asociată este definită prin

$$P(\{x_i\})=F(x_i+)-F(x_i)=p_i \quad i=1, 2, ..., n.$$

Definiția 6. a) Fie **F** funcția de repartiție a unei v.a. ξ. Dacă există o funcție nenegativă $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrabilă pe $\mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)\, dt \qquad \forall\, x \in R,$$

se spune că ρ este *densitate de probabilitate* sau *densitate de repartiție* a v.a. ξ.

b) Dacă v.a. ξ are densitate de probabilitate, se spune că ξ este *absolut continuă*.

Are loc următorul rezultat:

Propoziția 3. Dacă ρ este *densitate de probabilitate* a v.a. ξ atunci:

$$1°.\ P(a \le \xi < b) = \int_{a}^{b} \rho(x)\, dx\,, \qquad 2°.\ \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1\,.$$

Denumirea de densitate de probabilitate este justificată de relația

$$\rho(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P(x < \xi < x+h)}{h}.$$

Menționăm că de obicei $\rho(x) \neq P(\xi=x)$.

Definiția 7. Dacă v.a. ξ are densitatea de probabilitate ρ funcție continuă, cu excepția eventuală a unui număr finit de puncte de discontinuitate de specia I-a, spunem că v.a. ξ este de *tip continuu.*

Pentru o v.a. de tip continuu funcția de repartiție **F** este derivabilă aproape peste tot și derivata ei este egală aproape peste tot cu ρ.

În Fig.4 este reprezentat graficul unei densități de repartiție a unei v.a..

Scanned with OKEN Scanner

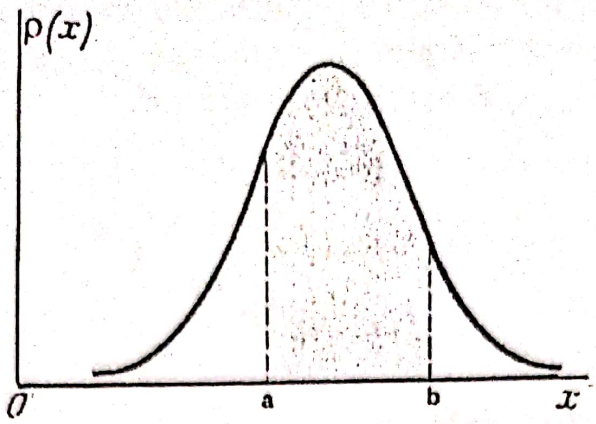


Fig. 4

Cele două proprietăți evidențiate în Propoziția 3 au următoarea interpretare geometrică:

1°. $P(a \leq \xi < b)$ este aria marcată în Fig.4

2°. Graficul lui ρ închide, împreună cu axa **Ox** o arie de valoare **1**

Exemplul 4. Considerăm v.a. ξ care are densitatea de repartiție de forma

$$\rho(x) = \begin{cases} c \text{ daca } x \in [a,b] \\ 0 \text{ daca } x \notin [a,b] \end{cases}$$

Condiția 2 din Propoziția 3 impune $c = \dfrac{1}{b-a}$. Graficul acestei funcții ρ este cel din **Fig. 5a.** Funcția de repartiție a v.a. ξ este

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ daca } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ daca } x \in [a,b] \\ 1 \text{ daca } x > b \end{cases}.$$

Graficul funcției **F** este cel din **Fig. 5b.**

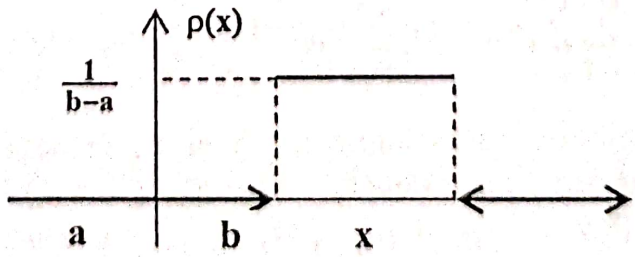


Fig. 5a

Scanned with OKEN Scanner

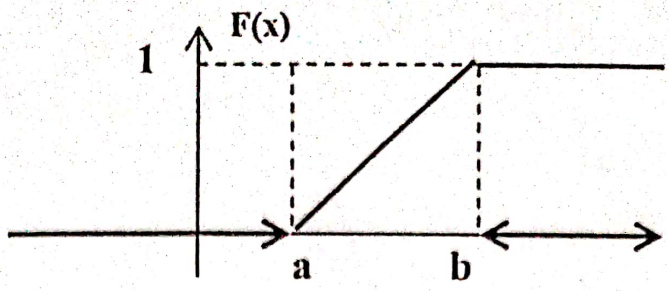


Fig. 5b

§4. Vectori aleatori

Fie (X, Y) un vector aleator ale cărui componente X şi Y sunt v.a. discrete cu valorile x_i şi respectiv y_j. Legea de probabilitate pentru (X, Y) este în întregime definită de mulţimea de numere $p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$. În cazul în care X şi Y sunt v.a. simple cu n şi respectiv m valori distincte, legea de probabilitate se prezintă sub forma tabelului următor:

Y→ X↓	y_1	y_2	.	y_j	.	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	.	p_{1j}	.	p_{1m}	p_{10}
x_2	p_{21}	p_{22}	.	p_{2j}	.	p_{2m}	p_{20}
.	.	.	.	.	.	.	.
x_i	p_{i1}	p_{i2}	.	p_{ij}	.	p_{im}	p_{i0}
.			.		.	.	.
x_n	p_{n1}	p_{n2}	.	p_{nj}	.	p_{nm}	p_{n0}
	p_{01}	p_{02}	.	p_{0j}	.	p_{0m}	

unde $p_{0j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$, j=1, 2, ..., m şi $p_{i0} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, i=1, 2, ..., n. Evident, au loc relaţiile $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, $\sum_{i=1}^{n} p_{i0} = 1$ şi $\sum_{j=1}^{m} p_{0j} = 1$.

Legile marginale, adică legile lui X şi Y, se deduc imediat din legea vectorului aleator; într-adevăr, pentru X, $P(X = x_i) = p_{i0}$, i=1, 2, ..., n iar pentru Y, $P(Y = y_j) = p_{0j}$, j=1, 2, ..., m. Dacă X şi Y sunt v.a. independente atunci $p_{ij}=p_{i0}p_{0j}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru componentele unui vector aleator se pot defini şi legi condiţionate. Într-adevăr, dacă evenimentele $X = x_i$ şi $Y = y_j$ au probabilităţi nenule se pot defini legile condiţionate $X_{|Y=y_j} = X_{|y_j}$ şi $Y_{|X=x_i} = Y_{|x_i}$ prin

$$P(X_{|y_j} = x_i) = P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{0j}} = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(Y = y_j)}$$

şi respectiv

$$P(Y_{|x_i} = y_j) = P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i0}} = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(X = x_i)}.$$

§5. Funcţia de repartiţie a unui vector aleator

Fie $V=(X_1,X_2, \dots , X_n)$ un vector aleator pe (σ)-câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$.

Definiţia 8. Funcţia $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

se numeşte *funcţia de repartiţie a vectorului aleator* V. Aici am folosit notaţia

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n) = P(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i < x_i))$$

Proprietăţile funcţiei de repartiţie

1) F este monoton crescătoare în raport cu fiecare argument x_i (i=1, 2, ..., n),

2) $$\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0, \quad \forall i = 1,2,\dots,n,$$

3)

$$\lim_{\substack{x_i \to +\infty \\ i \in \{1,2,\dots,n\}}} F(x_1,x_2,\dots,x_n) = F(+\infty,+\infty,\dots,+\infty) = 1$$

$$\lim_{\substack{x_i \to +\infty \\ i \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{j\}}} F(x_1,x_2,\dots,x_n) = P(X_j < x_j) = F_j(x_j), \quad \forall j = 1,2,\dots,n,$$

unde F_j este funcţia de repartiţie a v.a. X_j,

4) F este continuă la stânga în raport cu fiecare argument.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 9. Dacă există o aplicație $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ astfel încât are loc idetitatea

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\ldots\int_{-\infty}^{x_n}\rho(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1dt_2\ldots dt_n$$

$$\forall(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n,$$

atunci ρ se numește *densitatea de repartiție* sau *densitatea de probabilitate* a vectorului aleator V.

De exemplu, densitatea de probabilitate a unui vector aleator bidimensional $X=(X_1, X_2)$ cu lege de repartiție normală este

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

unde

$$m_i=M(X_i),\ \sigma_i^2=D^2(X_i),\ \rho=M((X_1-m_1)(X_2-m_2)).$$

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de vectori aleatori bidimensionali pentru a evita complicațiile de scriere care ar apare în cazul unei dimensiuni $n>1$ oarecare. Nu ne vom ocupa de proprietăți specifice cazului $n=2$ ci vom prezenta rezultate care se pot extinde în mod natural la cazul $n>2$.

Teorema 3. Fie F funcția de repartiție a vectorului aleator $V=(X_1, X_2)$. Atunci

1) $$P(a_1\le X_1<a_2, b_1\le X_2<b_2)=F(a_2,b_2)-F(a_1,b_2)-$$
$$-F(a_2,b_1)+F(a_1,b_1)$$

Dacă F este continuă în punctele $A(a_1, b_1)$ și $B(a_2, b_2)$ intervalele $[a_1, a_2)$ și $[b_1, b_2)$ pot fi înlocuite cu orice intervale de extremități a_1, a_2 și respectiv b_1, b_2,

2) dacă V are densitatea de probabilitate ρ atunci

$$P(a_1\le X_1<a_2, b_1\le X_2<b_2)=\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\rho(x,y)dxdy\ ,$$

Scanned with OKEN Scanner

şi în plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dxdy = 1 ,$$

3) dacă V are densitatea de probabilitate ρ şi există funcţiile

$$\rho_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dy , \quad \rho_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx$$

atunci ρ_1 şi ρ_2 sunt densităţile de repartiţie ale v.a. X_1 şi respectiv X_2 şi în plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_1(x)dx = 1 , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\rho_2(y)dy = 1 ,$$

4) dacă ρ este continuă în punctul $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ atunci

$$\rho(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} .$$

Demonstraţiile au la bază proprietăţile integralelor improprii şi cele ale integralelor duble.

Trebuie remarcat că au loc egalităţile

$$P(x'\le X_1 < x'') = \int_{x'}^{x''}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dy , \quad P(y'\le X_2 < y'') = \int_{y'}^{y''}dy\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)dx$$

Propoziţia 4. Dacă componentele X_1 şi X_2 ale vectorului aleator $V=(X_1, X_2)$ sunt v.a. independente, între funcţiile lor de repartiţie F_1 şi F_2 există relaţia

$$F(x_1, x_2)=F_1(x_1)F_2(x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in\mathbb{R}^2;$$

în plus, între densităţile de repartiţie ρ_1 şi ρ_2 există relaţia

$$\rho(x_1, x_2)= \rho_1(x_1)\,\rho_2(x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in\mathbb{R}^2 .$$

Fie $V=(X_1, X_2)$ un vector aleator cu densitatea de probabilitate ρ, $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcţie oarecare şi $Z=f(X_1, X_2)$. Atunci, funcţia de repartiţie G(z) a v.a. Z definită obişnuit prin

$$H(z)=P(Z<z)=P(f(X_1, X_2) <z),$$

satisface egalitatea

$$H(z) = \iint_{D_z}\rho(x,y)dxdy$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $D_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)<z\}$.
În cazurile particulare $f(x,y)=x+y$ sau $f(x,y)=x\cdot y$ domeniile D_z devin

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y<z\}$ şi respectiv $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\cdot y<z\}$.

Funcţia de repartiţie şi densitatea de repartiţie ale sumei X_1+X_2 sunt, respectiv

$$H(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}\rho(x,y)dy\,,\quad \rho_{X_1+X_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,z-x)dx\,;$$

funcţia de repartiţie şi densitatea de repartiţie ale produsului $X_1\cdot X_2$ sunt, respectiv

$$H(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{|x|}\rho(x,\frac{y}{x})dy\,,\quad \rho_{X_1\cdot X_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\rho(x,\frac{z}{x})dx\,.$$

Ne interesează acum distribuţiile condiţionate.

Mai întâi dorim să determinăm o funcţie $\rho(x_1|X_2=x_2)$ care să fie densitatea de probabilitate a v.a. X_1 condiţionată de $X_2=x_2$, adică

$$P(x'\le X_1<x''\mid X_2=x_2)=\int_{x'}^{x''}\rho(x_1\mid X_2=x_2)dx_1\,.$$

Pe baza definiţiei probabilităţilor condiţionate şi a formulei de medie pentru integrala definită se stabileşte că

$$P(x'\le X_1<x''|X_2=x_2)=\int_{x'}^{x''}\frac{\rho(x_1,x_2)}{\rho_2(x_2)}dx_1\,,$$

$$\rho(x_1\mid X_2=x_2)=\frac{\rho(x_1,x_2)}{\rho_2(x_2)}$$

Similar se stabileşte că

$$P(y'\le X_2<y''|X_1=x_1)=\int_{x'}^{x''}\frac{\rho(x_1,x_2)}{\rho_1(x_1)}dx_2\,,$$

$$\rho(x_2\mid X_1=x_1)=\frac{\rho(x_1,x_2)}{\rho_1(x_1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

§6. Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

Cunoaşterea funcţiei de repartiţie a unei v.a. permite să obţinem probabilităţile evenimentelor asociate v.a.. Din păcate nu putem determina totdeauna funcţia de repartiţie sau, dacă totuşi o ştim, este greu uneori să evaluăm integralele necesare calculării probabilităţilor diverselor evenimente. De aceea, de cele mai multe ori, se determină anumite caracteristici numerice care dau informaţii parţiale despre v.a. analizată dar care, mânuite cu pricepere, dau posibilitatea unei analize suficient de bune a caracteristicilor fenomenului modelat de v.a..

Caracteristicile numerice ale unei v.a. sunt de două feluri :

a) *de poziţie*, b) *de împrăştiere*.

Dintre caracteristicile de poziţie citãm: *modul* sau *dominanta*, *mediana*, *cuantilele*, *media*, *momentele* şi *momentele centrate*. Cele mai des utilizate caracteristici de împrăştiere sunt: *amplitudinea*, *dispersia*, *coeficientul de variabilitate al lui Pearson*, etc..

Se pot construi şi alte caracteristici numerice care dau informaţii asupra formei graficului frecvenţelor sau densităţilor de probabilitate ale unei v.a.. Astfel de coeficienţi sunt: *coeficientul de asimetrie, coeficientul de disimetrie, coeficientul de asimetrie Pearson* şi *coeficientul de exces*.

a) Caracteristici numerice de poziţie

1°. Modul

Modul **Mo** (*moda* sau *dominanta*) unei v.a. discrete ξ este valoarea cea mai probabilă, adică valoarea pe care ξ o ia cel mai des; dacă ξ este v.a. discretă atunci **Mo** este definită ca soluţie a ecuaţiei

$$P(\xi^{-1}(\mathbf{Mo})) = max\ \{P(\xi^{-1}(x)) \mid x \in Im\ \xi\};$$

deci **Mo** este valoarea v.a. care este luată cu cea mai mare probabilitate. Dacă ξ este v.a. de tip continuu, cu densitatea de probabilitate ρ, atunci **Mo** este definită ca soluţie a ecuaţiei

$$\rho(\mathbf{Mo}) = max\ \{\rho(x) \mid x \in \mathbb{R}\}\ .$$

Evident **Mo** nu este în mod necesar unic ; în cazul când v.a. ξ are mai multe valori dominante se spune că ξ este v.a. *plurimodală*.

Exemplul 5. 1°. Pentru v.a. **X** care are tabloul de repartiţie

Scanned with OKEN Scanner

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

valoarea **0** este valoare modală dacă $q > p$; în cazul $q < p$ valoarea **1** este valoare modală. Când $p = q = ½$, $Mo(X)=0$ sau **1** şi este bimodală; în acest caz se spune şi că **X** are repartiţie uniformă.

2°. Pentru v.a. **X** care are tabloul de repartiţie

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{32} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

valorile **3** şi **5** au probabilităţile cele mai mari de realizare, deci sunt valori modale; v.a. **X** este deci v.a. plurimodală (mai exact – bimodală).

3°. Pentru v.a. **X** care ia valorile $n \in \mathbb{N}$ şi are tabloul de repartiţie

$$X:\begin{pmatrix} n \\ \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

(adică **X** are repartiţie Poisson de parametru λ) valoarea modală depinde evident de parametrul λ:

- dacă $\lambda = 1$ valorile **0** şi **1** sunt valori modale deoarece $P(X = 0) = P(X = 1) = e^{-1} > P(X = k), \forall\, k > 1$
- dacă $\lambda = 5$ valorile **4** şi *5* sunt valori modale (**verificaţi!**).

4°. Pentru v.a. **X** de tip continuu care are densitatea de repartiţie

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}},$$

(adică **X** are repartiţie normală de tip **N(0,1)**) valoarea modală corespunde valorii $x = 0$.

2°. Mediana

Mediana **Me** a v.a. ξ este un număr real cu proprietatea că există tot atâtea elemente (în spaţiul de selecţie) în care v.a. ia valori $\le$ **Me** cât şi elemente în care v.a. ia valori $\ge$ **Me**, adică

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le Me\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \ge Me\}).$$

Mediana **Me** este caracterizată de relaţiile

$$F(Me) \le ½, \quad F(Me+0) \ge ½,$$

caracterizare foarte utilă în aplicaţii.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul v.a. continue ξ cu densitatea de probabilitate ρ mediana este unic determinată de ecuaţiile

$$\int_{-\infty}^{x}\rho(t)dt = \int_{x}^{+\infty}\rho(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Din punct de vedere geometric, mediana este abscisa punctului prin care trece paralela la axa **Oy** care împarte în două părţi egale aria dintre curba de ecuaţie $y=\rho(x)$ şi axa **Ox**.

Exemplul 6. Pentru v.a. din Exemplul 5 medianele sunt respectiv :

1°. Me(ξ) este orice număr dintre 0 şi 1,
2°. Me(ξ) = α, pentru orice α cu $3 \le \alpha \le 4$,
3°. Me(ξ) = 1,
4°. Me(ξ) = 0.

3°. Cuantilele

Sunt acele numere reale q_i **(i = 1, 2, ... , n-1)** cu proprietatea că dreptele $x = q_i$ împart aria cuprinsă între graficul funcţiei ρ şi axa *Ox* în **n** părţi egale. Cu alte cuvinte, pentru o v.a. de tip continuu, cu densitatea de repartiţie ρ cuantilele sunt definite prin relaţiile:

$$\int_{-\infty}^{q_1}\rho(t)dt = \int_{q_1}^{q_2}\rho(t)dt = \ldots = \int_{q_{n-1}}^{+\infty}\rho(t)dt = \frac{1}{n}.$$

În particular, *cuartilele, decilele* şi *(pro)centilele* sunt cuantilele corespunzătoare lui **n = 4, n=10** şi respectiv **n = 100.**

Se poate da următoarea caracterizare a cuantilelor, caracterizare de mare utilitate practică. Cuantilele q_i, **i=1, 2, ..., n-1** sunt caracterizate prin relaţiile:

$$F(q_1) \le \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad F(q_1 + 0) \ge \frac{1}{n}$$
$$F(q_2) \le \frac{1}{n} + F(q_1) \le \frac{2}{n} \quad \text{si} \quad F(q_2 + 0) \ge \frac{2}{n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(q_{n-1}) \le \frac{1}{n} + F(q_{n-2}) \le \frac{n-1}{n} \quad \text{si} \quad F(q_{n-1} + 0) \ge \frac{n-1}{n}$$

Această caracterizare este definţia quartilelor unei v.a. discrete.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Media unei variabile aleatoare.

Media unei v.a. este în intenție un indicator al tendinței centrale de grupare a valorilor v.a.. Un candidat la acest rol, des utilizat, este media aritmetică (media ponderată). Ea este preferată datorită ușurinței cu care se poate mânui. Din păcate, ea nu reflectă totdeauna fidel tendința centrală de grupare; există situații când este în mod firesc înlocuită fie de media geometrică, fie de media armonică. Unul dintre marile ei defecte constă în faptul că nu elimină influența nefastă a așa-numitelor valori "aberante".

Media unei v.a. simple. Fie ξ o v.a. simplă având tabloul de repartiție

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Definiția 8. Se numește *media* v.a. ξ numărul notat $M(\xi)$ definit prin

$$(8) \qquad M(\xi) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{n=1}^{n} p_i x_i .$$

La fel ca pentru funcții (vezi [1], Cap.I., p.49) se demonstrează că media unei v.a. are proprietățile :

1°. $M(a) = a$ pentru orice v.a. constantă $a : \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$,

2°. $\min\limits_{1 \le i \le n} x_i \le M(\xi) \le \max\limits_{1 \le i \le n} x_i$

2°. $M(a\xi) = aM(\xi)$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall$ v.a. ξ,

3°. $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$, $\forall$ v.a. ξ, η,

4°. $|M(\xi \cdot \eta)| \le \sqrt{M(\xi^2)} \cdot \sqrt{M(\eta^2)}$, $\forall$ v.a. ξ, η,

5°. $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$, $\forall$ v.a. independente ξ, η.

Pentru o v.a. discretă ξ cu o infinitate de valori, cu tabloul de repartiție

$$\xi : \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix}_{n \in N}$$

pentru care seria $\sum\limits_{n \in N} p_n x_n$ este absolut convergentă, expresia

Scanned with OKEN Scanner

$$M(\xi) = \sum_{n\in N} p_n x_n$$

se numeşte *media* (sau *speranţa matematică*) v.a. ξ. Dacă A este un eveniment cu $P(A)>0$ şi seria $\sum_{n\in N} x_n P(\xi = x_n \mid A)$ este absolut convergentă, expresia

$$M(\xi \mid A) = \sum_{n\in N} x_n P(\xi = x_n \mid A)$$

se numeşte *media* (sau *speranţa matematică*) v.a. ξ *condiţionată de evenimentul* A. Se demonstrează că dacă $\{A_n\}_{n\in N}$ este un sistem complet de evenimente iar ξ este o v.a. discretă a cărei medie există, atunci

$$M(\xi) = \sum_{n\in N} P(A_n) M(\xi \mid A_n).$$

Media v.a. discrete are exact aceleaşi proprietăţi cu media unei v.a. simple cu condiţia ca mediile care apar în formularea acestor proprietăţi să existe.

Pentru v.a. continuă ξ cu densitatea de probabilitate ρ, pentru care $\int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx$ este absolut convergentă expresia $M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx$ se numeşte *media* (sau *speranţa matematică*). Media v.a. continue are exact aceleaşi proprietăţi cu media unei v.a. simple cu condiţia ca mediile care apar în formularea acestor proprietăţi să existe.

Abaterea unei v.a. Fie ξ o v.a. şi x_0 un număr real fixat. V.a. $\theta_{x_0}(\xi) = \xi - x_0$ se numeşte *abaterea v.a.* ξ *de la valoarea* x_0. Evident, dacă $M(\xi)$ există, atunci

$$M(\theta_{x_0}(\xi)) = M(\xi) - x_0 .$$

Dacă $x_0 = M(\xi)$ vom nota $\theta_{x_0}(\xi)$ cu $\theta(\xi)$ şi o numim *abaterea de la medie*. Abaterea de la medie are proprietatea $M(\theta(\xi))=0$.

Momentele unei v.a. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ şi *v.a.* ξ. Se numeşte *moment de ordinul* k al v.a. ξ numărul notat cu $M_k(\xi)$ definit prin

$$M_k(\xi) = M(\xi^k).$$

Scanned with OKEN Scanner

In particular $M_0(\xi) = 1$ şi $M_1(\xi) = M(\xi)$. Calculul momentelor de ordinul k se face utilizând abaterile valorilor funcţiei faţă de valoarea x_o folosită şi în calculul valorii medii a unei funcţii şi utilizând formula

$$M_k(\xi) = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \; M_{k-i}(\theta_{x_o}(\xi)) \; x_o^i .$$

In cazul în care $x_o = M(\xi)$, notăm $m_k = m_k(\xi) = M_k(\theta(\xi))$ şi îl numim *momentul centrat de ordinul* k. Din formula precedentă rezultă

$$(9) \qquad M_k(\xi) = \sum_{i=o}^{k} C_k^i \; m_{k-i} \; [M(\xi)]^i$$

$$m_k = \sum_{i=o}^{k} (-1)^k \; C_k^i \; M_{k-i}(\xi) \; \{M(\xi)\}^i .$$

În practică se foloseşte des şi momentul absolut de ordinul **r** ca fiind media v.a. $|\xi|^r$.

Media vectorului aleator $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ este vectorul coloană $\mu = [M(X_1) \; M(X_2) \; \ldots \; M(X_m)]^T$. Similar se definesc momentele simple şi centrate de diverse ordine.

b) Caracteristici numerice de împrăştiere

1°. Amplitudinea

Este diferenţa dintre valoarea maximă şi cea minimă a v.a .

2°. Dispersia (varianţa)

Considerăm v.a. ξ. Valorile ei pot fi mai mult sau mai puţin dispersate (depărtate unele de altele). Împrăştierea valorilor v.a. ξ se măsoară cu ajutorul unui parametru numit *dispersie* sau *varianţă*.

Definiţia 9. *Dispersia* sau *varianţa* v.a. ξ este numărul notat $D^2(\xi)$ (sau cu σ_ξ^2 sau cu $V(\xi)$) definit prin

$$D^2(\xi) = \sigma_\xi^2 = M[(\xi - M(\xi))^2] = V(\xi) = m_2(\xi) .$$

Proprietăţile dispersiei

Oricare ar fi v.a. ξ, η au loc afirmaţiile :

1°. $D^2(\xi) \geq 0, \forall \xi$,

Scanned with OKEN Scanner

2°. $D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2$,

3°. $D^2(a) = 0$, oricare ar fi v.a. constantă a,

4°. $D^2(a\xi) = a^2D^2(\xi)$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\forall\, \xi$,

5°. $D^2(a + \xi) = D^2(\xi)$, $\forall \xi$ şi oricare ar fi v.a. constantă a,

6°. dacă v.a. ξ, η sunt independente, atunci $D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta)$.

7°. *inegalitatea lui Cebîşev* : pentru orice v.a. ξ are loc

$$P(|\xi - M(\xi)| > \varepsilon) < 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

8°. dacă v.a. ξ, η sunt independente, atunci

$D^2(\xi \cdot \eta) = D^2(\xi) \cdot D^2(\eta) + (M(\eta))^2 \cdot D^2(\xi) + (M(\xi))^2 \cdot D^2(\eta)$.

Demonstraţiile se fac la fel ca pentru proprietăţile similare ale funcţiilor (vezi [1], Cap.I, p.53).

Dispersia este un obiect comod de folosit în cercetările teoretice dar are dezavantajul că este exprimată în unităţi pătratice ale măsurilor valorilor v.a. analizate. De aceea se preferă să se folosească un alt indicator al împrăştierii valorilor exprimat în aceleaşi unităţi de măsură ca şi valorile v.a. analizate, numită *abaterea medie pătratică* sau *ecartul tip*, definită ca fiind

$$\sigma = \sigma_\xi = \sqrt{D^2(\xi)}\,.$$

Este important de menţionat că pentru orice v.a. suma abaterilor în raport cu o valoare λ este minimă dacă λ=**Me** (vezi [1], p.55).

3°. Coeficientul Pearson de variabilitate

Dacă dorim să apreciem comparativ variabilitatea a două v.a. care modelează mărimi măsurabile cu unităţi de măsură diferite, trebuiesc folosite "abateri relative" care să se exprime prin numere abstracte. O astfel de abatare este *coeficientul Pearson de variabilitate*, notat C_v, definit prin raportul $C_v = \frac{\sigma_\xi}{M(\xi)}$. Se preferă ca acest coeficient să se exprime sub formă de procente şi anume $C_v\% = \frac{\sigma_\xi}{M(\xi)} \times 100$. În diverse domenii se fac convenţii specifice de interpretare a acestui coeficient. De exemplu, în unele ramuri ale biologiei, se consideră că :

Scanned with OKEN Scanner

- C_v % cuprins între **0 şi 10%** reflectă o **variabilitate mică**
- C_v % cuprins între **10% şi 20%** reflectă o **variabilitate mijlocie**
- C_v % mai mare ca **20%** reflectă o **variabilitate mare.**

Pe baza proprietăţii 8° a dispersiei rezultă că pentru orice două v.a. independente **X** şi **Y** are loc egalitatea:

$$CV_{XY}^2 = CV_X^2 + CV_Y^2 + CV_X^2 \cdot CV_Y^2;$$

dacă cei doi coeficienţi de variabilitate sunt mici atunci este bună aproximarea

$$CV_{XY}^2 \cong CV_X^2 + CV_Y^2$$

c) Alte caracteristici numerice

Folosind caracteristicile numerice deja introduse se introduc şi alte caracteristici numerice utile mai ales în studiul v.a. de tip continuu.

1°. Coeficientul de asimetrie Pearson

Acest coeficient, notat cu β_1, dă informaţii asupra "gradului de asimetrie" al graficului densităţii de repartiţie al v.a. şi este definit prin

$$\beta_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} = \frac{m_3^2}{\sigma^6}.$$

Fisher a propus ca măsură a asimetriei graficului densităţii de probabilitate coeficientul γ_1 definit prin

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{\sigma^3} = \pm\sqrt{\beta_1}.$$

Evident, β_1 şi γ_1 sunt nuli dacă graficul este simetric şi nenuli în caz contrar; ei au modulele cu atât mai mari cu cât este mai pronunţată asimetria graficului. În cazul distribuţiilor unimodale se interpretează şi semnul lui γ_1 şi anume: pentru curbele cu *asimetrie pozitivă* ($\gamma_1 > 0$) respectiv cu *asimetrie negativă* ($\gamma_1 < 0$) este dată în figura care urmează (Fig.6)

Scanned with OKEN Scanner

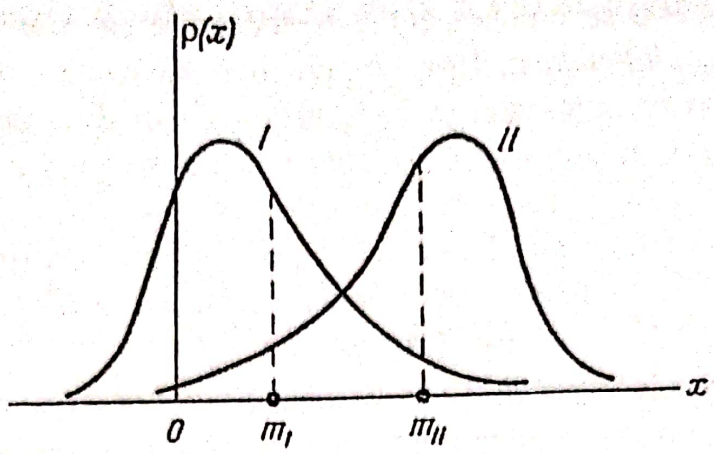


Fig. 6

Graficul I este al unei curbe cu *asimetrie pozitivă* ($\gamma_1 > 0$ sau **Mo<m**), iar graficul II este al unei curbe cu *asimetrie negativă* ($\gamma_1 < 0$ sau **Mo>m**).

Trebuie menționat că fiecare moment de ordin impar dă informații asupra asimetriei repartiției unei v.a..

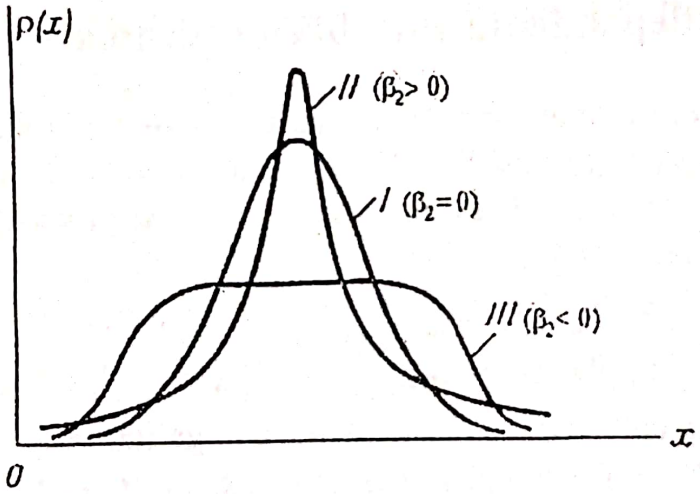


Fig. 7

2°. Coeficientul de aplatizare Pearson

Este o măsură a „boltirii" curbei. Raportul

$$\beta_2 = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

se numeşte *coeficientul de boltire.*

Fisher propune o măsură a boltirii curbei prin comparație cu boltirea repartiției normale de aceeaşi medie şi dispersie şi anume: cantitatea $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ se numeşte *coeficientul de aplatizare.* Curbele

Scanned with OKEN Scanner

pentru care $\gamma_2 > 0$ se numesc curbe *leptocurtice* iar cele cu $\gamma_2 < 0$ se numesc curbe *platicurtice*. Este de remarcat că pentru curbele leptocurtice valorile se aglomerează în jurul valorii medii ; pentru curbele platicurtice valorile sunt mai dispersate față de valoarea medie. Aceste interpretări sunt sugerate și de figura de mai sus (Fig.7) pentru cazul distribuțiilor simetrice sub formă de clopot. În fapt, pentru orice distribuție uniformă, indiferent de media sau dispersia ei, avem

$$\beta_2 = 1{,}8, \quad \gamma_2 = -1{,}2.$$

Pentru curbele sub formă de U coeficienții β_2 și γ_2 sunt cu atât mai mici decât cu cât minimul probabilității sau densității de probabilitate este mai pronunțat. Pentru distribuțiile sub formă de clopot acești coeficienți sunt mai mari decât 1,8 și respectiv – 1,2.

§7. Măsuri ale gradului de dependență al variabilelor aleatoare

a) Independența variabilelor aleatoare

Am definit anterior noțiunea de sistem de v.a. independente.

Reamintim că v.a. **X** și **Y** sunt independente dacă pentru orice două numere reale **a** și **b** evenimentele (X<a) și (Y<b) sunt independente. Dacă v.a. **X** și **Y** au tablourile de repartiție

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \cdots x_i \cdots x_n \\ p_1 & p_2 \cdots p_i \cdots p_n \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad Y:\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \cdots y_j \cdots y_m \\ q_1 & q_2 \cdots q_j \cdots q_m \end{pmatrix}$$

atunci independența lor este echivalentă cu egalitățile

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p_i q_j \,, \forall i = 1,2,..,n \,, \forall j = 1,2,...,m \,.$$

În cazul în care v.a. **X** și **Y** au densitățile de probabilitate $\rho(x)$ și $\theta(x)$ independența lor are drept consecință egalitățile

$$P((X < a) \cap (Y < b)) = F_X(a) \cdot F_Y(b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} \rho(x)\theta(y)dxdy, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

unde F_X și F_Y notează funcțiile de repartiție ale celor două v.a..

De cele mai multe ori v.a. nu sunt independente. Între valorile lor pot exista relații funcționale dar mai des există relații ce nu pot fi surprinse printr-o relație funcțională. În acest ultim caz avem de a face cu relații de tip probabilist.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dependența funcțională a variabilelor aleatoare

Fie **X** o v.a. de tip continuu, cu densitatea de repartiție **ρ(x)** și funcția de repartiție **F(x)**. Dacă **φ:ℝ→ℝ** este o funcție continuă, se pune problema să se determine densitatea de repartiție **g(x)** și funcția de repartiție **G(x)** pentru v.a. **Y=φ(X)**. Ne ocupăm mai întâi de cazul în care funcția φ este inversabilă. Pentru a preciza lucrurile, vom presupune mai întâi că φ este monoton crescătoare. Pe baza egalităților

$$F(x) = P(X < x) = P(Y < \varphi(x)) = G(\varphi(x))$$

rezultă

$$G(y)=F(\varphi^{-1}(y))$$

și, prin derivare,

$$g(y) = \frac{f(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}.$$

Cea mai simplă legătură funcțională este legătura liniară **Y=a+bX** care corespunde funcției **φ(x) = a + bx.** Dacă **b>0** funcția φ este crescătoare.

Atunci $g(y) = \frac{1}{b} f(x) = \frac{1}{b} f\left(\frac{y-a}{b}\right)$

În cazul în care φ este monoton descrescătoare echivalența evenimentelor **(X<x)=(Y>φ(x))** implică egalitățile

$$G(y)=1-F(\varphi^{-1}(y)),\ g(y) = \frac{f(x)}{|\varphi'(x)|} = \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}.$$

De exemplu, pentru v.a. **Y=a+bX** cu **b<0,** φ este monoton descrescătoare și avem

$$g(y) = \frac{1}{|b|} f(x) = \frac{1}{|b|} f\left(\frac{y-a}{b}\right).$$

În cazul în care φ este oarecare se exploatează inversabilitatea sa pe porțiuni. De exemplu, dacă **Y=X²** atunci egalitatea

$$P(Y < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$$

implică egalitățile

$$G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}),\quad g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

În astfel de condiţii se poate rezolva direct problema legăturii dintre media v.a. **X** şi media v.a. **Y=φ(X)**; mai exact, se stabilesc legături între media lui **Y** şi diverse momente centrate ale v.a. **X.**

Dacă v.a. **X** are media $m_X=M(X)$, funcţia φ este derivabilă de câte ori este necesar şi dacă abaterile de la medie nu sunt mari, atunci

$$Y=\varphi(m_X)+\frac{\varphi'(m_X)}{1!}(X-m_X)+\frac{\varphi''(m_X)}{2!}(X-m_X)^2+\ldots+$$

$$+\frac{\varphi^{(k)}(m_X)}{k!}(X-m_X)^k+R$$

unde **R** este restul din formula lui Taylor. Putem deci aproxima v.a. printr-un polinom de grad ales în v.a. abatere $X-m_X$ şi anume

$$M(Y)\cong\varphi(m_X)+\frac{\varphi''(m_X)}{2!}\sigma_X^2+\ldots+\frac{\varphi^{(k)}(m_X)}{k!}m_k(X).$$

În cazul particular când φ este polinom de grad **k** formula precedentă este chiar egalitate. Dacă reţinem termenii până la gradul 2 inclusiv, rezultă formula de aproximare

$$M(Y)\cong\varphi(m_X)+\frac{\varphi''(m_X)}{2!}\sigma_X^2.$$

În cazul $\varphi(x)=1/x$ această formulă devine

$$M(1/X)\cong(1+CV_X^2)/m_X,$$

unde CV_X notează coeficientul de variabilitate pentru **X**. Folosind această aproximaţie, dacă **X** şi **Y** sunt v.a. independente, atunci

$$M(X/Y)\cong(1+CV_Y^2)\frac{m_X}{m_Y}>\frac{m_X}{m_Y}.$$

Un alt caz important este cel al funcţiei $\varphi(x)=\ln x$. Se obţine ca mai sus

$$M(\ln X)\cong\ln m_X-\tfrac{1}{2}CV_X^2.$$

Pe baza aproximărilor de mai sus se poate arăta că

$$\sigma_{1/X}^2\cong\frac{\sigma_X^2}{m_X^4},\qquad CV_{1/X}\cong CV_X.$$

Dacă **X** şi **Y** sunt v.a. independente, atunci

$$CV_{X/Y}\cong\sqrt{CV_X^2+CV_Y^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Similar se pune problema pentru vectorii aleatori. Apar evident dificultăţi de tehnică de calcul.

Considerăm de exemplu că asupra vectorului aleator $X=(X_1, X_2,..., X_n)$ se face o transformare care face trecerea la vectorul aleator $Y=(Y_1, Y_2,...,Y_n)$ pe baza schimbării definite prin sistemul de relaţii

$$Y_i=\varphi_i(X_1, X_2,..., X_n),\ i=1,2,...,n,$$

unde funcţia vectorială $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_n)$ defineşte o transformare bijectivă a spaţiului $\mathbb{R}^n$. Vom scrie pe scurt

$$X \xrightarrow{\varphi} Y, \quad Y=\varphi(X).$$

Densitatea de probabilitate ρ_Y a vectorului aleator Y se obţine folosind densitatea de probabilitate ρ_X a vectorului aleator X prin formula

$$\rho_Y(y)=\frac{\rho_X\left[\varphi^{-1}(y)\right]}{|\det J|}$$

unde **det J** este jacobianul transformării φ şi este

$$\det J=\det\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

În cazul particular în care transformarea φ este liniară, adică $\varphi=AX$ atunci **det J=det A.** Dacă transformarea este ortogonală acest determinant este ± 1.

c) Dependenţa în sens probabilist a variabilelor aleatoare

O măsură a gradului de dependenţă a două v.a. este *covarianţa* sau *corelaţia.*

Definiţia 12. Fie X_1 şi X_2 două v.a. care au mediile **m'** şi **m"**. Se numeşte *covarianţa* sau *corelaţia* v.a. X_1 şi X_2 cantitatea notată cu **cov** (X_1, X_2) şi definită prin relaţia

$$\text{cov}\ (X_1, X_2)=M((X_1-m')(X_2-m")).$$

În cazul particular $X_1=X_2$, covarianţa devine chiar dispersia sau varianţa, adică **cov** $(X_1, X_1)=D^2(X_1)$. Folosind proprietăţile mediei se obţin următoarele proprietăţi ale covarianţei:

1°. **cov** $(X_1, X_2)=$ **cov** (X_2, X_1),

Scanned with OKEN Scanner

2°. $\mathbf{cov}\,(\alpha X_1, \beta X_2) = \alpha\beta\,\mathbf{cov}\,(X_1, X_2)$

3°. $\mathbf{cov}\,(X_1, X_2) = M(X_1 X_2) - M(X_1)M(X_2)$,

4°. $D^2(X_1+X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + 2\,\mathbf{cov}\,(X_1, X_2)$

5°. dacă $X = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ şi $Y = \beta + \sum_{j=1}^{m} \beta_j Y_j$ (cu $\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_j \in \mathbb{R}$), există mediile v.a. X_i şi Y_j şi există covarianţele $\mathbf{cov}\,(X_i, Y_j)$ pentru orice $i=1, 2, \ldots, n$ şi orice $j=1, 2, \ldots, m$, atunci există $\mathbf{cov}\,(X, Y)$ şi are loc egalitatea

$$\mathbf{cov}(X,Y) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \,\mathbf{cov}(X_i, X_j).$$

Pe baza proprietăţii 5° se stabileşte imediat formula

$$D^2\left(\alpha + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 D^2(X_i) + 2\sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \,\mathbf{cov}\,(X_i, X_j).$$

Covarianţa a două v.a. este pozitivă dacă cele două variabile au tendinţa dominantă să varieze în acelaşi fel; dacă cele două v.a. au tendinţa dominantă să varieze în sensuri contrare atunci covarianţa este negativă.

Informaţii asupra dependenţei probabiliste pentru un vector aleator $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se obţin din matricea de covarianţă $\Sigma = \mathbf{cov}\,(X_1, \ldots X_n)$ care are ca elemente $\mathbf{cov}\,(X_i, Y_j)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, adică

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D^2(X_1) & \mathbf{cov}(X_1,X_2) & \ldots & \mathbf{cov}(X_1,X_n) \\ \mathbf{cov}(X_2,X_1) & D^2(X_2) & \ldots & \mathbf{cov}(X_2,X_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{cov}(X_n,X_1) & \mathbf{cov}(X_n,X_2) & \ldots & D^2(X_n) \end{bmatrix} = M(XX^T) - \mu\mu^T.$$

Evident, matricea de covarianţă este totdeauna simetrică şi pozitiv definită. Invers, o matrice simetrică Σ este matricea de covarianţă a unui vector aleator dacă şi numai dacă este pozitiv definită. Deoarece Σ este matrice reală pozitiv definită are toate valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reale pozitive şi este asemenea cu matricea diagonală $\Lambda = \mathbf{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Definim atunci $\Lambda^{1/2} = \mathbf{diag}\left(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}\right)$ şi $\Sigma^{1/2} = P\Lambda^{1/2}P^T$

Scanned with OKEN Scanner

unde **P** are drept coloane versorii proprii corespunzători valorilor proprii ale lui Σ.

Dacă matricea de covarianță Σ este inversabilă există o infinitate de matrice de ordinul **n** astfel încât vectorul aleator $Y = AX$ are ca matrice de covarianță matricea unitate I_n.

Transformarea $Y = \Sigma^{-1/2}X$ este cunoscută sub numele de transformarea Malahanobis. $Y = \Sigma^{-1/2}(X-\mu)$ este atunci vector aleator normalizat sau central-redus (are componentele v.a. normalizate) cu componente necorelate. Trebuie menționat că v.a. $D^2 = (X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$ are media **n**.

Un dezavantaj al utilizării covarianței provine din faptul că aceasta este intim legată de unitățile de măsură folosite în evaluarea valorilor v.a. analizate. Deci comparația covarianței a două v.a. cu covarianța altor două v.a. nu este în general posibilă. Acest dezavantaj este înlăturat prin introducerea coeficientului de corelație.

Definiția 13. *Coeficientul de corelație* al v.a. **X** și **Y** este numărul abstract notat cu $\rho(X, Y)$ și definit prin relația:

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}}.$$

Pentru un vector aleator $X=(X_1,..., X_n)$ se definește matricea coeficienților de corelație $\rho(X_1,....,X_n) = \left|\rho(X_i,X_j)\right|_{n\times n}$ în care $\rho(X_i, X_i) = 1$, $i=1,2,...,n$.

Pe baza proprietăților mediei și ale covarianței se stabilesc următoarele proprietăți ale coeficientului de corelație:

1) Dacă v.a. **X** și **Y** sunt independente, atunci $\operatorname{cov}(X, Y)=\rho(X, Y)=0$. Reciproca nu este întotdeauna adevărată; într-adevăr, v.a. dependente funcțional $X:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ și $Y = X^2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au $\operatorname{cov}(X, Y)=\rho(X, Y)=0$.

2) Totdeauna $|\rho(X, Y)|\leq 1$ iar egalitate există dacă și numai dacă există numerele reale **a** și **b** astfel încât $Y=aX+b$.

Scanned with OKEN Scanner

§7. Funcția caracteristică a unei variabile aleatoare

Se numește *funcția caracteristică* a v.a. **X** funcția $\varphi_X:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definită prin

$$\varphi_X(t)=M(e^{itX}).$$

Dacă **X** este v.a. simplă cu tabloul de repartiție

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

atunci

$$\varphi_X(t)=\sum_{k=1}^{n} e^{itx_k}p_k\,.$$

Pentru o v.a. discretă **X**, cu o familie numărabilă de valori, adică

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix}$$

funcția caracteristică este

$$\varphi_X(t)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k}p_k\,;$$

seria din membrul drept este absolut și uniform convergentă, deci funcția caracteristică există pentru orice v.a. de tip discret.

Funcția caracteristică φ_X a v.a. continue **X** care are densitatea de probabilitate $\rho(t)$ este definită prin

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\rho(x)dx\,.$$

Această funcție există totdeauna (ea este chiar transformata Fourier a densității de repartiție a v.a. **X** care există deoarece $|e^{itX}|=1$ iar densi-tatea de probabilitate a lui **X** este o măsură mărginită) și este o funcție continuă. Funcția caracteristică a unei v.a. este uniform continuă.

Evident, funcția caracteristică a unei v.a. are proprietățile

$$\varphi_X(0)=1,\quad |\varphi_X(t)|\le 1.$$

Prin calcul direct se obțin egalitățile:

Scanned with OKEN Scanner

$$\varphi_{\lambda X}(t)=\varphi_X(\lambda t),\quad \varphi_{X+a}(t)=e^{ita}\varphi_X(t),\quad \varphi_{\lambda X+a}(t)=e^{ita}\varphi_X(\lambda t).$$

Dacă **X** şi **Y** sunt v.a. independente atunci

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Această proprietate se extinde în mod evident la un sistem finit de v.a. independente.

Din formula de inversare a transformatei Fourier rezultă că dacă φ_X este funcţia caracteristică a v.a. **X** care are densitatea de probabilitate continuă $\rho(t)$ atunci are loc formula

$$\rho(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt\ .$$

Această formulă ne asigură că funcţia caracteristică, dacă există, determină în mod unic funcţia de repartiţie a v.a. analizate. Tot din această formulă rezultă că două v.a. cu densitate de probabilitate care au funcţii caracteristice egale au densităţi de probabilitate egale aproape peste tot.

Dacă şirul de funcţii de repartiţie $(F_n)_{n\in N}$ corespunzător şirului de v.a. $(X_n)_{n\in N}$ converge punctual către funcţia de repartiţie **F** atunci şirul corespunzător de funcţii caracteristice converge la funcţia caracteristică corespunzătoare lui **F**. Are loc şi o reciprocă a acestui rezultat şi anume: dacă şirul de funcţii caracteristice $(\varphi_n)_{n\in N}$ corespunzător şirului de v.a. $(X_n)_{n\in N}$ converge către funcţia caracteristică φ atunci şirul corespunzător de funcţii de repartiţie converge la o funcţie de repartiţie **F** iar φ este funcţia caracteristică corespunzătoare lui **F**.

Aceste rezultate stau la baza rezultatelor legate de convergenţa în repartiţie a unui şir de v.a..

Este util să ţinem cont că

$$\varphi_X(-t)=\overline{\varphi_X(t)}\ .$$

Din proprietăţile transformatei Fourier rezultă că dacă momentul absolut de ordinul **n** ($n>0$) există atunci există şi derivata $\varphi_X^{(n)}(t)$ şi au loc egalităţile

$$\varphi^{(n)}(t)=i^n\int_{-\infty}^{+\infty}x^n e^{itx}\rho(x)dx\ ,\quad M_n(X)=\frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n}\ .$$

Dacă pentru orice **n** ($n>0$) există momentul absolut de ordinul **n** atunci funcţia caracteristică $\varphi_X(t)$ se poate dezvolta în serie de puteri şi se obţine

Scanned with OKEN Scanner

$$\varphi_X(t)=\sum\frac{(it)^k}{k!}M(X^k)\ .$$

Dacă v.a. X, X_1 şi X_2 au funcţiile de repartiţie F, F_1 şi F_2 şi funcţiile caracteristice φ, φ_1 şi φ_2 atunci F este produsul de convoluţie al funcţiilor F_1 şi F_2, adică

$$F=F_1*F_2\ ,\quad (F_1*F_2)(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(y-x)dF_2(x)$$

dacă şi numai dacă $\varphi(t)=\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$.

Se poate defini şi funcţia caracteristică a unui vector aleator utilizând transformarea Fourier multidimensională. Se numeşte funcţia caracteristică a vectorului aleator $X=(X_1, X_2,..., X_n)$ funcţia $\varphi_X(t_1, t_2,...,t_n)$ definită prin

$$\varphi_X(t_1, t_2,...,t_n)=M(\exp(t_1X_1+t_2X_2+...+t_nX_n)).$$

Componentele $X_1, X_2,..., X_n$ sunt independente dacă şi numai dacă

$$\varphi_X(t_1,t_2,...,t_n)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(t_i)\ .$$

§9. Funcţia generatoare a unei variabile aleatoare

Fie X o v.a. discretă care ia numai valori întregi nenegative. Vom nota cu $p_k=P(X=k)$.

Se numeşte *funcţia generatoare* a v.a. X funcţia complexă cu valori complexe $G:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definită prin

$$G(z)=G_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kz^k$$

unde z este un număr complex cu $|z|\le 1$.

Exemplul 7. 1) Funcţia generatoare a unei v.a. cu repartiţie $\mathcal{B}(n, p)$ este

$$G(z)=\sum_{k=0}^{n}z^kC_n^kp^kq^{n-k}=(pz+q)^n\ ,$$

2) funcţia generatoare a unei v.a. cu repartiţie $\mathcal{P}(\lambda)$ este

Scanned with OKEN Scanner

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(z-1)}$$

Ţinând cont de egalităţile

$$p_0 = G(0), \quad p_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1,2,...$$

rezultă că funcţia generatoare determină în mod unic repartiţia v.a. X. În plus are loc egalitatea

$$G(1)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Funcţia caracteristică este legată de funcţia generatoare prin egalitatea

$$\varphi(z) = G(e^{iz}).$$

Să notăm cu $q_k = P(X > k), k \geq 0$. Atunci

$$q_k = p_{k+1} + p_{k+2} + ... = 1 - p_0 - p_1 - ... - p_k.$$

Se poate deci introduce funcţia generatoare

$$H(z) = H_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k, \quad |z| \leq 1.$$

În discul $|z| \leq 1$ între cele două funcţii generatoare are loc relaţia

$$H(z) = \frac{1-G(z)}{1-z} \quad \Leftrightarrow \quad 1-G(z) = (1-z)H(z).$$

Derivând ultima egalitate obţinem egalitatea

$$-G'(z) = -H(z) + (1-z)H'(z)$$

din care, pentru $z=1$ rezultă

$$G'(1)=H(1).$$

Derivând termen cu termen seria de definiţie a funcţiei G se obţin egalităţile

$$G'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1}, \quad G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = M(X)$$

Prin urmare .

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} q_k.$$

Cu ajutorul funcţiei generatoare G se pot calcula momentele v.a. X. Se obţin relaţiile

Scanned with OKEN Scanner

$$M(X) = M_1(X) = G'(1)$$
$$M_2(X) = G''(1) + G'(1)$$
$$M_3(X) = G'''(1) + 3G''(1) + G'(1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D^2(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 .$$

Funcţia generatoare a unei v.a. discrete este deosebit de utilă în studiul anumitor sisteme de aşteptare.

Funcţia generatoare se poate defini şi pentru v.a. de tip continuu.

§10. Funcţia generatoare a momentelor

Pentru o v.a. ξ se defineşte *funcţia generatoare a momentelor* ca fiind, atunci când există, funcţia

$$\psi_\xi(t) = M(e^{t\xi}).$$

După cum v.a. ξ este v.a. discretă sau continuă (de densitate de probabilitate ρ) formulele de calcul pentru funcţia $\psi_\xi(t)$ sunt:

$$\psi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{kt}, \qquad \psi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\rho(x)dx .$$

Spre deosebire de cazul v.a. simple, existenţa funcţiei generatoare, pentru o v.a. de tip continuu, este o problemă foarte serioasă. De exemplu, pentru o v.a. cu repartiţie normală $N(m,\sigma^2)$ (vezi Cap. III, §2) există totdeauna funcţie generatoare şi anume

$$\psi_\xi(t) = e^{mt + \frac{t^2\sigma^2}{2}},$$

în vreme ce pentru repartiţia Cauchy (vezi Cap. III, §2) nu există funcţie generatoare.

Denumirea provine de la egalitatea evidentă

$$\psi_\xi(t) = 1 + tM(\xi) + \frac{t^2}{2!}M_2(\xi) + \ldots + \frac{t^k}{k!}M_k(\xi) + \ldots .$$

Prin urmare, au loc formulele

$$M_k(\xi) = \left[\frac{d^k\psi_\xi}{dt^k}\right]_{|t=0}, \quad k = 1,2,\ldots .$$

Trebuie remarcat că dacă ξ şi η sunt v.a. independente, atunci

$$\psi_{\xi+\eta}(t) = \psi_\xi(t)\,\psi_\eta(t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII

PRINCIPALELE DISTRIBUȚII TEORETICE

Vom prezenta principalele legi (distribuții) teoretice care stau la baza statisticii inferențiale.

§1. Legi discrete

1°. Legea discretă uniformă

Se spune că v.a. simplă **X** are *lege uniformă* de parametru **n** (cu $n \in \mathbb{N}^*$) dacă ia, cu aceeaşi probabilitate, fiecare dintre valorile **1, 2, ... , n** adică $P(X = 1) = P(X = 2) = ... = P(X = n)$. Rezultă că $P(X = k) = \frac{1}{n}$ şi că **X** are tabloul de repartiție

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Îi putem asocia diagrama din **Fig.1.**

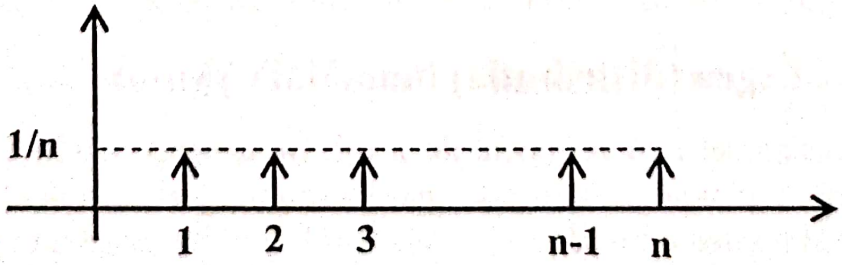


Fig. 1

Prin calcul direct rezultă

Scanned with OKEN Scanner

$$M(X)=\frac{n+1}{2},\quad D^2(X)=\frac{n^2-1}{12},\quad \varphi_X(t)=\frac{e^{it}}{n}\cdot\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}.$$

Ca exemplu se poate considera v.a. **X** care ia ca valori numărul de puncte care apar la aruncarea unui zar; **X** este o v.a. cu repartiție uniformă cu **n=6**.

2°. Legea Bernoulli de parametru p

Se spune că v.a. simplă **X** are lege Bernoulli de parametru **p** dacă ia valorile **{0, 1}** cu probabilitățile **P(X = 1) = p** și **P(X = 0) = q = 1 - p**. Deci **X** are tabloul de repartiție

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1\\ q & p\end{pmatrix}.$$

Se stabilește ușor că

$$M(X)=p,\qquad D^2(X)=p\cdot q\,.$$

În plus, se stabilește că $m_k(X)=pq^k+q(-p)^k$, din care obținem

$$m_3(X)=pq(2p-1),\quad m_4(X)=pq(3p^2+3p+1).$$

Prin calcul direct se stabilește că funcția caracteristică pentru *legea Bernoulli* este $\varphi_X(t)=pe^{it}+q$.

O astfel de variabilă este legată de experiența alegerii aleatoare a unui individ dintr-o populație care conține o proporție **p** de indivizi care au unul dintre două caractere complementare. De exemplu, alegerea aleatoare a unui individ dintr-o populație care conține o proporție **p** de indivizi infectați cu un virus *V*. În acest caz, alegerea unui individ infectat este asimilată cu realizarea unui eveniment **A** care are probabilitatea **p**.

3°. Legea (distribuția) binomială $\mathcal{B}(n,p)$

Presupunem că se repetă de **n** ori, în aceleași condiții, o experiență al cărei rezultat urmărit este apariția sau neapariția unui eveniment **A** cu probabilitatea de realizare **p**; rezultatul unei efectuări a experienței este independent de rezultatele celelorlalte experiențe. Atunci v.a. **X**, care ia ca valori numărul de realizări ale evenimentului **A**, are ca valori

Scanned with OKEN Scanner

orice număr k, $0 \le k \le n$, iar $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, unde $q = 1 - p$. Se spune în acest caz că X are o lege binomială $\mathcal{B}(n,p)$ de parametri n şi p şi scriem $X \in \mathcal{B}(n,p)$. Tabloul de repartiţie al v.a. X este

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

V.a. X are media şi dispersia:

$$m = M(X) = np, \qquad V(X) = D^2(X) = \sigma^2 = npq.$$

Din aceste formule rezultă

$$p = 1 - \frac{\sigma^2}{m}, \qquad n = \frac{m^2}{m - \sigma^2},$$

adică pentru o v.a. cu distribuţie binomială distribuţia este complet cunoscută dacă se cunosc media şi dispersia acelei v.a..

Funcţia caracteristică pentru *legea binomială* este

$$\varphi_X(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n.$$

Cu ajutorul ei se determină

$$m_3 = npq(q - p) \qquad m_4 = npq(1 - 6pq + 3npq)$$

$$\beta_1 = \frac{(q-p)^2}{npq} \qquad \beta_2 = 3 + \frac{(1-6pq)}{npq}$$

$$\gamma_1 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} \qquad \gamma_2 = \frac{1-6pq}{npq}.$$

Ca mediană se poate lua totdeauna $n/2$. Pentru a determina valoarea modală vom nota $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$. Raportul $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}$ ne asigură că

$$p_{k+1} = p_k \text{ pentru } k = np - q$$
$$p_{k+1} > p_k \text{ pentru } k < np - q$$
$$p_{k+1} < p_k \text{ pentru } k > np - q.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că valoarea cea mai probabilă este unicul număr întreg k_0 cu proprietatea $np - q < k_0 < np+p$ dacă $np - q$ este diferit de un număr întreg; dacă $np - q$ este un număr întreg atunci şi $np - q$ şi $np+p$ sunt valori modale. În general, pentru o v.a. cu repartiţie binomială valoarea modală este apropiată de valoarea medie.

Pe de altă parte, raportul a doi termeni egal depărtaţi de valorile extreme 0 şi n este $\frac{p_k}{p_{n-k}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2k}$. Rezultă că diagrama distribuţiei unei v.a. cu repartiţie binomială este simetrică dacă şi numai dacă $p = q = ½$ şi este asimetrică stâng ($\gamma_1 > 0$) sau drept ($\gamma_1 < 0$) după cum $p < ½$ sau $p > ½$.

Evident, experienţa care se repetă poate fi identificată cu experienţa alegerii aleatoare cu revenire a unui individ dintr-o populaţie care conţine o proporţie p de indivizi care au unul dintre două caractere complementare.

Exemplul 1. Numărul X de animale bolnave printre 4 animale extrase dintr-o populaţie de animale care conţine o proporţie p de animale bolnave este o v.a. cu tabloul de repartiţie

k	P(X=k) pentru p=0,1	P(X=k) pentru p=0,3	P(X=k) pentru p=0,5
0	$C_4^0(0,1)^0(0,9)^4 = 0,6561$	$C_4^0(0,3)^0(0,7)^4 = 0,2401$	$C_4^0(0,5)^0(0,5)^4 = 0,0625$
1	$C_4^1(0,1)^1(0,9)^3 = 0,2916$	$C_4^1(0,3)^1(0,7)^3 = 0,4116$	$C_4^1(0,5)^1(0,5)^3 = 0,2500$
2	$C_4^2(0,1)^2(0,9)^2 = 0,0486$	$C_4^2(0,3)^2(0,7)^2 = 0,2646$	$C_4^2(0,5)^2(0,5)^2 = 0,3750$

Scanned with OKEN Scanner

3	$C_4^3(0,1)^3(0,9)^1 =$ $= 0,0036$	$C_4^3(0,3)^3(0,7)^1 =$ $= 0,0756$	$C_4^3(0,5)^3(0,5)^1 =$ $= 0,2500$
4	$C_4^4(0,1)^4(0,9)^0 =$ $= 0,0001$	$C_4^4(0,3)^4(0,7)^0 =$ $= 0,0081$	$C_4^4(0,5)^4(0,5)^0 =$ $= 0,0625$
Total	1.0000	1.0000	1.0000

Acestor tabele li se asociază reprezentările grafice realizate prin diagramele în batoane din **fig.2 a), b)** şi **c)**.

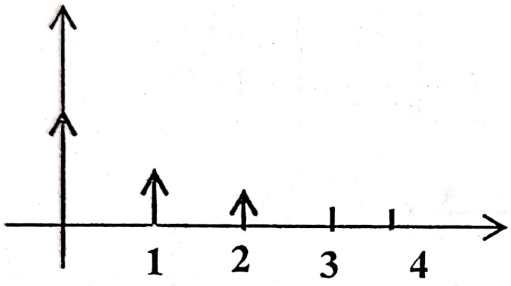


Fig. 2a

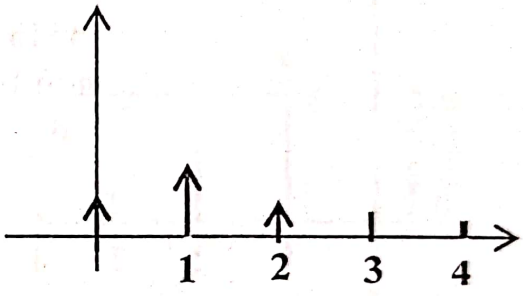


Fig. 2b

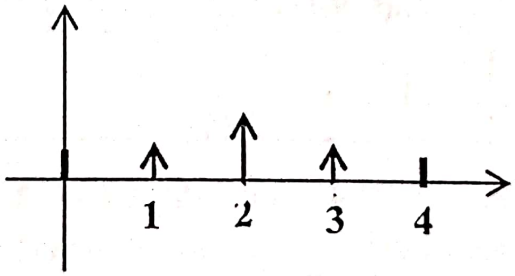


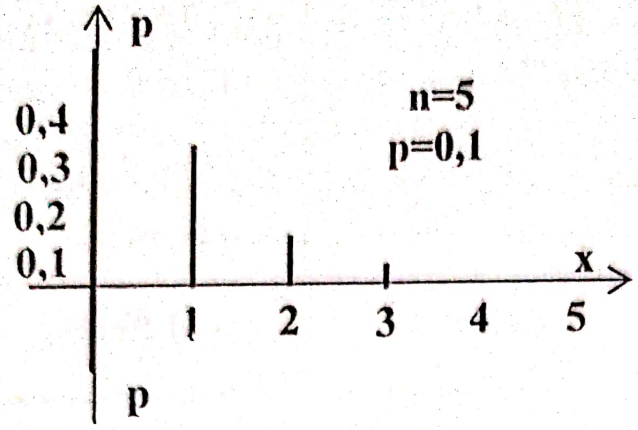
Fig. 2c

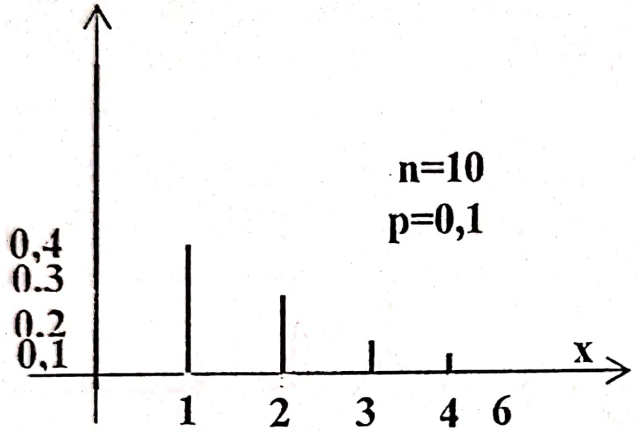
În primele două cazuri **p<q** şi se constată şi pe grafic asimetria stângă.

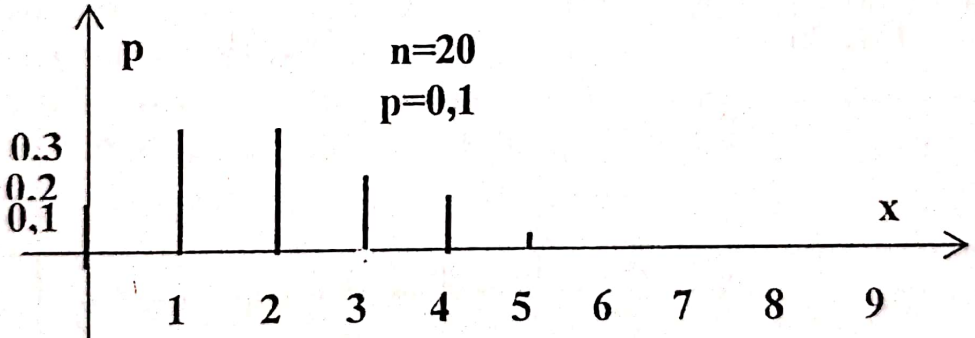
În figura următoare sunt reprezentate diagramele în batoane ale repartiţiilor binomiale corespunzătoare la diverse valori pentru **n** şi **p.**

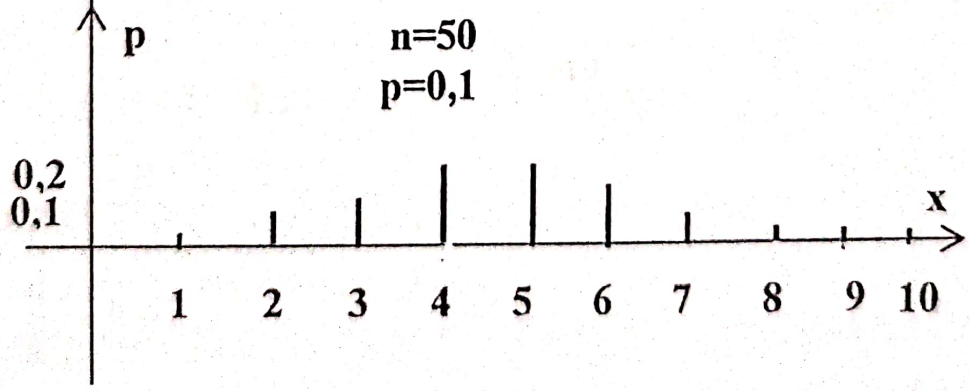
Este de remarcat că reprezentările grafice sunt în general nesimetrice, dar asimetria se atenuează cu cât **n** şi/sau **p** cresc (vezi **Fig.3**).

Scanned with OKEN Scanner









Scanned with OKEN Scanner

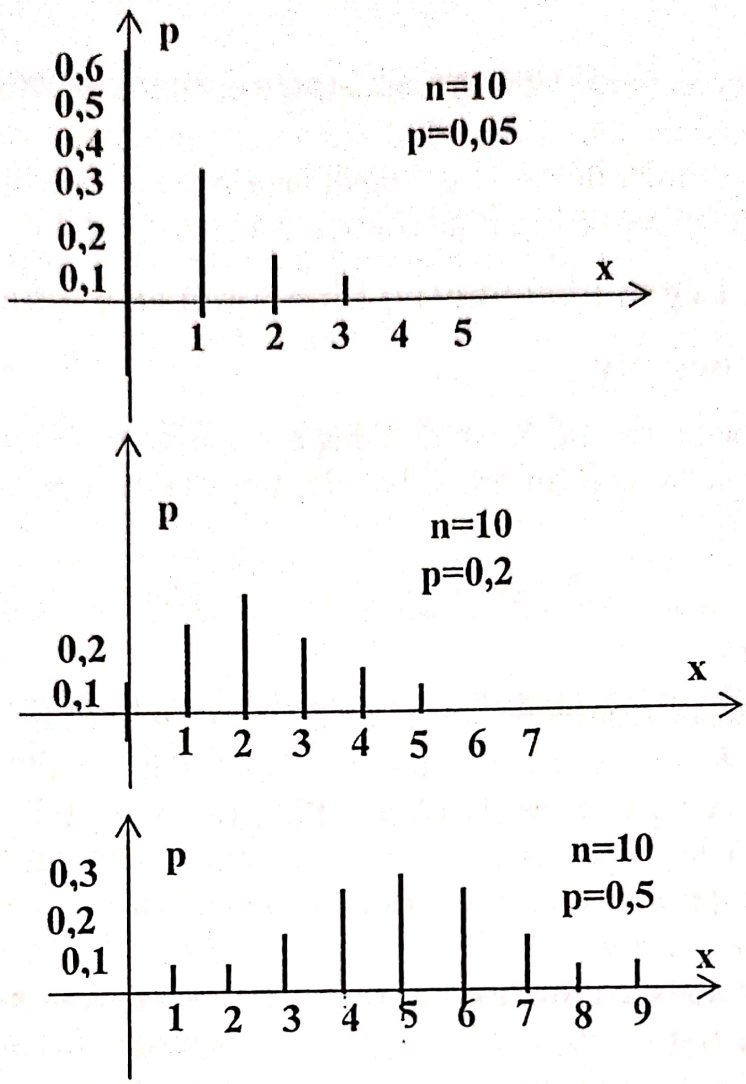


Fig.3

Exercițiul 1.a) Arătați că orice v.a. **X** care are repartiția $\mathcal{B}(n,p)$ este suma a **n** v.a. independente având repartiție Bernoulli de parametru **p**.

b) Arătați că dacă **X** are repartiția $\mathcal{B}(n, p)$ atunci **n - X** are repartiția $\mathcal{B}(n, 1-p)$.

c) Arătați că suma a două v.a.independente cu repartiții binomiale $X_1 \in \mathcal{B}(n_1,p)$ și respectiv $X_2 \in \mathcal{B}(n_2,p)$ este tot o v.a. cu repartiție binomială și anume $X_1 + X_2 \in \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece repartiția $\mathcal{B}(n, p)$ apare frecvent în experimente repetate, s-au construit tabele de valori numerice corespunzătoare la diverse valori ale parametrilor **n** și **p**. Importanța acestei repartiții a impus și tabelarea funcțiilor de repartiție corespunzătoare.

4°. Legea (distribuția) binomială cu exponent negativ

Spunem că v.a. **X** are distribuție binomială cu exponent negativ cu parametrii **m** și **p** (**m** întreg pozitiv, $0<p<1$) dacă poate lua valorile întregi $\geq m$ și

$$P(X=k)= C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} \qquad \forall k \geq m .$$

unde $q=1-p$.

Această distribuție apare în legătură cu situația următoare: o experiență E se efectuează până la cea de a **m** –a realizare a unui eveniment **A** legat de ea. Dacă $p = P(A)$ este probabilitatea de realizare a lui **A** la o efectuare a experienței atunci numărul **X** de repetări ale experienței este v.a. de repartiție binomială cu exponent negativ cu cu parametrii **m** și **p**.

Într-adevăr, evenimentul $(X=k)$ este intersecția evenimentului "*în primele* **k-1** *efectuări ale experienței evenimentul* **A** *se produce de* **m-1** *ori*" cu evenimentul „*în efectuarea numărul* **k** *a experienței se produce evenimentul* **A**".

Dacă v.a. **X** are distribuție binomială cu exponent negativ cu parametrii **m** și **p** atunci

$$M(X) = m/p, \quad D^2(X) = \frac{mq}{p^2}, \quad q=1-p \quad \varphi_X(t) = \left[\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}\right]^n .$$

Ținând cont de egalitatea $C_{k-1}^{m-1} = \frac{m}{k} C_k^m$ rezultă că putem folosi tabelele de valori ale repartiției $\mathcal{B}(n_1,p)$ pentru a determina rapid valorile probabilităților v.a. cu repartiție binomială cu exponent negativ.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Legea (distribuția) hipergeometrică

Spunem că v.a. **X** are *repartiție* (*distribuție*) *hipergeometrică de parametri* **a, b, n** (**a, b, n** întregi pozitivi **n** ≤ **a** +**b**) dacă poate lua orice valoare întreagă **k** între *max* (**0, n-b**) și *min* (**n, a**) și

$$P(X=k)=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}\ .$$

Un exemplu concret care conduce la o v.a. cu repartiție hipergeometrică este următorul: dacă dintr-o urnă care conține **a** bile albe și **b** bile negre se extrag succesiv **n** bile, fără întoarcerea bilei extrase în urnă (sau se extrag toate **n** simultan) iar **X** este v.a. care ia ca valori numărul de bile albe extrase, atunci **X** are distribuție hipergeometrică cu parametrii **a, b, n**.

Prin calcul direct se stabilește că valoarea medie și dispersia unei astfel de variabile aleatoare au expresiile:

$$M(X)=np\ ,\ D^2(X)=npq\frac{a+b-n}{a+b-1}$$

unde $p=\frac{a}{a+b}$, $q=\frac{b}{a+b}$.

Valoarea medie se poate calcula ușor pe baza observației că $X=\sum_{k=1}^{n}X_k$, unde X_k este v.a. care ia ca valori numărul de bile albe care apar la extragerea *k*. Evident X_k, pentru fiecare $k\in\{1, 2, \dots, n\}$, are repartiția

$$X_k:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix},\quad k=1,2,\dots,n\ .$$

Deoarece $M(X_k)=\frac{a}{a+b}$ rezultă $M(X)=\sum_{k=1}^{n}M(X_k)=n\frac{a}{a+b}$; dar deoarece v.a. X_k nu sunt independente, nu se poate determina la fel de ușor și dispersia v.a. **X**.

Situația practică care conduce la v.a. cu repartiție hipergeometrică este următoarea: dacă dintr-o populație *P* , care are **N** indivizi, din care o proporție **p** au caracterul *C* se extrag **n** indivizi, fără a întoarce

Scanned with OKEN Scanner

individul ales în populație, atunci v.a. **X** care ia ca valori numărul **k** de 233indivizi (din cei *n* aleşi) care au caracterul *C* urmează o repartiție hiper-geometrică pentru care

$$P(X = k) = \frac{C_{Np}^{k} C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Aici se acceptă că **Np** este număr întreg deoarece **p** este rezultatul unei împărțiri la **N**. Se spune în acest caz că **X** are repartiție de tip $\mathcal{H}(N, n, p)$.

O proprietate importantă a legii hipergeometrice $\mathcal{H}(N, n, p)$ este că, pentru $N \to \infty$, tinde spre o lege de tip $\mathcal{B}(n, p)$. Acest rezultat este uşor de acceptat intuitiv deoarece pentru un efectiv mare deosebirea dintre o extragere cu revenire şi una fără revenire este destul de mică.

În aplicații se aproximează legea hipergeometrică cu o lege binomială atunci când $\frac{n}{N} < 0{,}1$, adică eşantionul analizat reprezintă cel mult **10%** din efectivul populației. Această convenție are la bază observația că

$$D^2(X) = npq\left(1 - \frac{n-1}{a+b-1}\right) > npq\left(1 - \frac{n}{a+b}\right) = npq\left(1 - \frac{n}{N}\right) > \frac{9}{10}npq$$

Unii autori acceptă aproximarea dacă eşantionul analizat reprezintă cel mult **5%** din efectivul populației.

Exemplul 2. Se ştie că **100** din cele **1000** de vaci ale unei ferme au mamită. Dacă se aleg aleator trei vaci care este probabilitatea ca toate trei să **nu** sufere de mamită? Distribuția v.a. care ia ca valori numărul de animale bolnave (dintre cele trei extrase) este evident hipergeometrică. Deoarece $\frac{3}{1000} < \frac{1}{20} < \frac{1}{10}$, această distribuție se poate aproxima bine printr-o lege binomială $\mathcal{B}(3; p)$, cu $p = \frac{100}{1000} = 0{,}1$. Rezultă că putem aproxima probabilitatea p_1 ca cele trei vaci extrase să fie sănătoase prin $p_1 = (1 - 0{,}1)^3 = 0{,}729$. Dacă am fi dorit o determinare directă a acestei probabilități am fi fost conduşi la valoarea numerică exactă care este

Scanned with OKEN Scanner

reprezentată simbolic prin $p_1 = \frac{C_{100}^0 \cdot C_{900}^3}{C_{1000}^3}$; numărul p_1 este, evident, greu de reprezentat ca fracție zecimală.

Dacă notăm $p_k = P(X=k)$ atunci are loc formula

$$p_k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{a(a-1)...(a-k+1)}{(b-n+1)(b-n+2)...(b-n+k)} \cdot p_0 .$$

Făcând notațiile $\alpha=-n$, $\beta=-a$, $\gamma=b-n+1$ funcția generatoare

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k$$

devine

$$G(t) = p_0 \cdot \left[1 + \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta}{\gamma} t + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} t^2 + ...\right]$$

Se evidențiază în paranteză seria hipergeometrică a lui Gauss; aceasta justifică denumirea de distribuție hipergeometrică.

Deoarece, în condiții rezonabile, legea hipergeometrică se aproximează cu o lege binomială, nu a fost nevoie să se facă tabele speciale pentru această distribuție.

6°. Legea (distribuția) Poisson

Spunem că v.a. **X** are *repartiție* (*distribuție*) *Poisson de parametru* $\lambda>0$, sau că **X** are repartiție $\mathcal{P}(\lambda)$, dacă are ca imagine mulțimea $\mathbb{N}$ iar

$$P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Se stabilește ușor că

$$M(X) = D^2(X) = \lambda .$$

Pentru repartiția Poisson de parametru λ funcția caracteristică este

$$\varphi_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} .$$

Folosind derivatele funcției caracteristice rezultă

$$M_2(X) = \lambda + \lambda^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$M_3(X) = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3, \quad m_3 = \lambda$$
$$M_4(X) = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^2 + \lambda^4, \quad m_4 = \lambda + 3\lambda^2.$$

Pe baza lor se pot calcula şi coeficienţii de asimetrie şi cei de aplatizare Pearson şi Fisher.

Există tabele care conţin valorile uzuale ale funcţiei de repartiţie a unei v.a. de repartiţie Poisson ca funcţie de parametrul λ.

Exemplul 3. Presupunem că într-un volum V de lichid sunt repartizate în mod uniform N microorganisme; aceasta înseamnă că două prelevări de volume v egale vor conţine acelaşi număr de microorganisme. Ne propunem să determinăm probabilitatea p ca într-un volum v să se găsească x microorganisme. Deoarece s-a presupus că repartizarea microorganismelor în lichid este uniformă, rezultă că $p = \frac{v}{V}$ iar densitatea lor este $d = \frac{N}{V}$. Fie X v.a. care ia ca valori numărul de microorganisme dintr-un eşantion de volum v. Atunci P(X=x) ca x microorganisme să apară în v se calculează cu ajutorul distribuţiei binomiale şi este

$$P(X = x) = C_N^x p^x (1-p)^{N-x} = \frac{N(N-1)...(N-x+1)}{x!}\left(\frac{v}{V}\right)^x \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-x}$$

Ţinând cont că $vd = \frac{vN}{V}$ putem scrie

$$P(X = x) = \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)...\left(1-\frac{x-1}{N}\right)}{x!}(vd)^x \left(1 - \frac{vd}{N}\right)^{N-x}.$$

Trecând la limită pentru $N \to +\infty$ se obţine densitatea de probabilitate

$$\rho(x) = \frac{(vd)^x}{x!} e^{-vd}$$

care este o repartiţie Poisson de parametru $\lambda = vd$.

Exemplul 4. Dacă interesează numărul de apelări N la un dispensar veterinar într-o perioadă de timp T atunci valoarea medie

Scanned with OKEN Scanner

M(N) este M(N)=cT, unde c este *cadența* (adică numărul mediu de apelări pe minut) într-o unitate de timp. Se demonstrează că

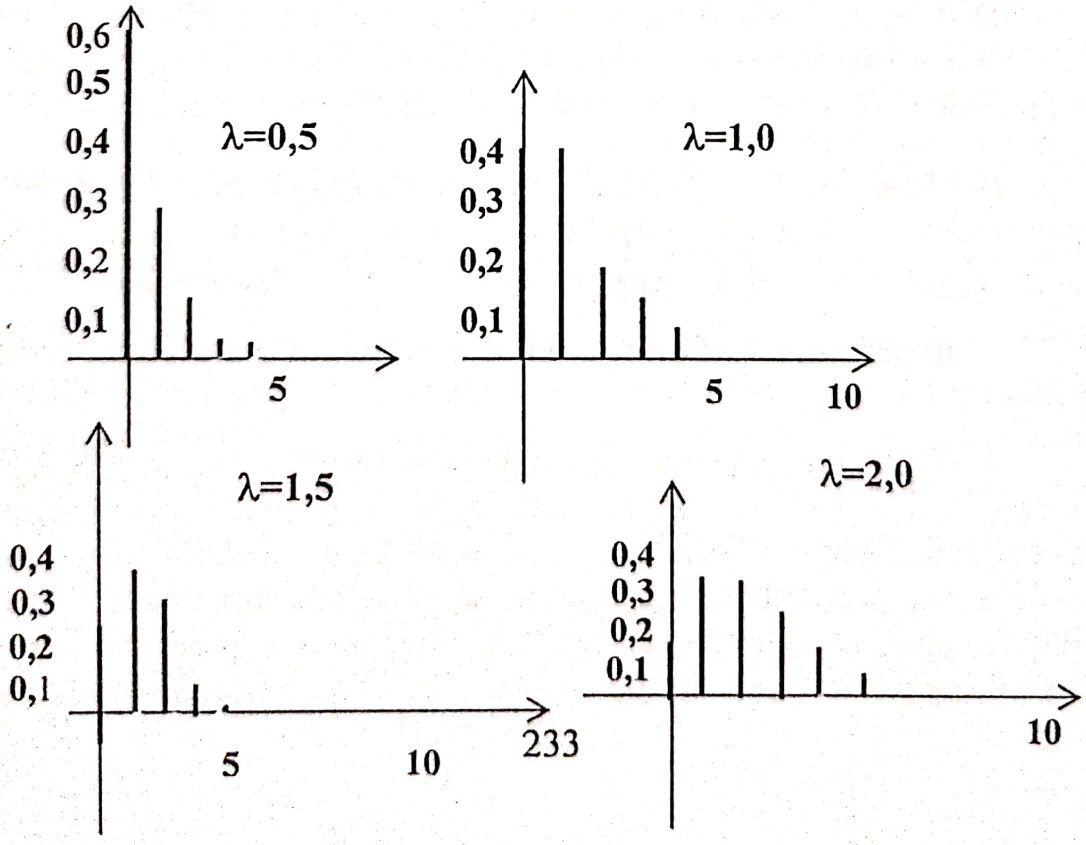
$$P(N = n) = e^{-cT} \frac{(cT)^n}{n!}.$$

Această distribuție apare în mod natural şi în situații de tipul următor:

- numărul de apeluri telefonice pe minut într-o centrală telefonică,
- numărul de accidente de vaccinare la clientela unui veterinar,
- numărul de bacterii dintr-o cultură dintr-un vas Pétri,
- numărul de particule γ emise de o substanță radioactivă, etc...

În **fig.4** sunt reprezentate grafic repartiții de tip Poisson pentru diverse valori ale parametrului λ.

Se remarcă faptul că graficele sunt asimetrice şi că valorile mici corespund la probabilități mari de realizare. De aceea distribuția Poisson se mai numeşte şi *legea evenimentelor rare*. Aceleaşi grafice arată că asimetria se atenuează când λ creşte. Pentru valori mari ale lui λ distribuția se apropie de cea normală.



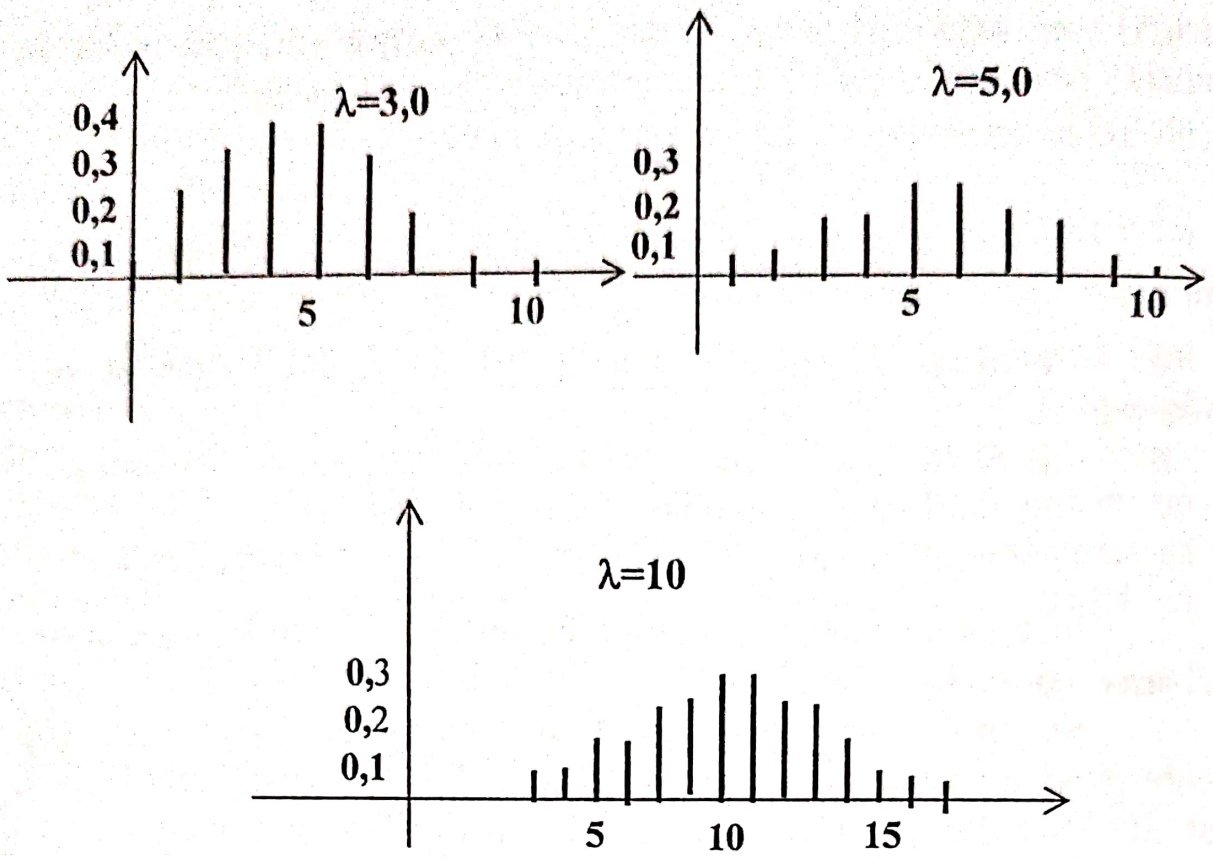


Fig. 4

Distribuția Poisson este o bună aproximare a distribuției binomiale când **n** este mare și **p** este mic. Această aproximare se folosește când $n > 40$ și $np < 5$ (sau $nq < 5$). Mai exact are loc afirmația:

Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un șir de v.a. binomiale de tip* $\mathcal{B}(n, p)$. Dacă $n \to \infty$ *și* $p \to 0$ *astfel încât produsul* np *tinde spre o limită finită* λ, *atunci șirul de v.a.* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge în "lege" spre o v.a. de tip Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$.

Vom prezenta două situații practice în care se poate folosi acest rezultat.

1. Placa unui hematimetru este împărțită în 400 pătrate și **X** este v.a. care ia ca valori numărul de particule ale unei soluții ce se găsesc într-un anumit pătrat *P* al plăcii. Dacă repartiția particulelor în soluție este omogenă probabilitatea ca o particulă să se afle în pătratul *P* este **1/400**. În plus, experiențele constând în plasarea a **n** particule într-o soluție de pe placă se pot considera independente. În aceste ipoteze legea

Scanned with OKEN Scanner

v.a. **X** este binomială de parametri **n** şi **1/400**. Deoarece numărul **n** este mare (de ordinul miilor sau zecilor de mii), se poate înlocui legea binomială prin legea Poisson de parametru **n/400**.

2. O altă situaţie în care se poate folosi o astfel de aproximare este următoarea. Se consideră o populaţie de efectiv mare şi un caracter *C* rar în această populaţie (de exemplu albinismul). Dacă selectăm cu revenire un eşantion de **n** indivizi legea v.a. care ia ca valori numărul de indivizi din eşantion care au caracterul *C* este o lege binomială de parametri **n** şi **p** unde **p** este proporţia indivizilor cu caracterul *C* din populaţie. Deoarece **p** este mic, trebuie să luăm eşantioane de volume mari pentru a ne asigura că v.a. **X** nu ia valori prea mici. În aceste condiţii se poate considera că **X** are repartiţie $\mathcal{P}(np)$. Dacă extragerile sunt fără revenire, se poate considera iarăşi că **X** are repartiţie $\mathcal{P}(np)$ dacă efectivul populaţiei este mare în raport cu efectivul eşantionului; într-adevăr, în acest caz **X** are repartiţie hipergeometrică ce poate fi aproximată cu o repartiţie binomială, iar la rândul ei, repartiţia binomială poate fi aproximată printr-o repartiţie Poisson.

Exemplul 3. Un rezervor de **2000** litri de apă conţine în medie 2 bacterii pe litru. Se acceptă că pericolul de îmbolnăvire apare dacă se ingeră cel puţin 8 bacterii. Un trecător bea un litru de apă din rezervor. Să determinăm probabilitatea de a fi în primejdie de îmbolnăvire.

Vom nota cu **X** v.a. care ia ca valori numărul de bacterii conţinute în litrul de apă băut de trecător. Bazinul conţine $\mathbf{n = 4000}$ bacterii şi fiecare bacterie are probabilitatea $\mathbf{p = \frac{1}{2000}}$ de a fi în apa consumată de trecător. Se poate considera că **X** este o v.a. de lege de repartiţie $\mathcal{B}(4000, 1/2000)$. Deoarece $\mathbf{n > 40}$ şi $\mathbf{np = 2 < 5}$ rezultă că repartiţia v.a. **X** este bine aproximată de o repartiţie Poisson de parametru **2**. Pe baza tabelului repartiţiei Poisson rezultă că $\mathbf{P(X \geq 8) = 8 \times 10^{-4}}$. Evident, un calcul direct ar fi fost extrem de delicat de realizat. Într-adevăr, ar trebui să calculăm

$$\mathbf{P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8)} \quad \text{unde}$$

$$\mathbf{P(X < 8) = P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = 7)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, evident, probabilităţile

$$P(X=i)=C_{4000}^{i}\cdot\frac{1}{2000^{i}}\cdot\left(\frac{1999}{2000}\right)^{4000-i},\quad i=0,1,\ldots,7$$

sunt cantităţi greu de calculat.

Acest exemplu evidenţiază faptul că uneori este important să calculăm $P(X>k)$ pentru o repartiţie binomială. Acest subiect va fi analizat mai târziu.

Există clase de fenomene pentru care condiţiile de caracterizare justifică faptul că legea v.a. studiate este o lege Poisson. Este vorba de aşa-numitele *procese poissoniene*.

O altă proprietate importantă a distribuţiilor Poisson este : *suma a două v.a. independente cu repartiţie Poisson este tot o v.a. cu repartiţie Poisson*. Mai exact, dacă v.a. **X** are repartiţie $\mathcal{P}(\lambda)$ iar **Y** are repartiţie $\mathcal{P}(\mu)$ atunci **X+Y** are repartiţie $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

7°. Legea (distribuţia) geometrică. Legea lui Pascal

Este legea care apare în legătură cu numărul de încercări necesare pentru a apare un eveniment de probabilitate **p**. Dacă **X** este v.a. care ia ca valori numărul de probe necesare pentru a se realiza evenimentul **A** cu $p=P(A)$ atunci **X** are ca imagine mulţimea $\mathbb{N}^*$ şi

$$P(X=n)=p(1-p)^{n-1},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Spunem că v.a. **X** are *repartiţie* (*distribuţie*) *Pascal de parametru* $p>0$ şi ordin **n** dacă ia ca valori orice element din $\mathbb{N}_n=\{n, n+1,\ldots.\}$cu probabilita-tea $P(X=m)=C_{m-1}^{n-1}p^n q^{m-n}$, $\forall m\geq n$. Variabila aleatoare de repartiţie Pascal de parametru **p** şi ordinul **n** este suma a **n** v.a. cu repartiţie geometrică de parametru **p**.

Se stabileşte uşor că pentru v.a. cu repartiţie geometrică

$$M(X)=\frac{1}{p},\qquad D^2(X)=\frac{q}{p^2}.$$

Legea lui Pascal de ordinul **n** este legea numărului de încercări necesare pentru a observa de **n** ori un eveniment **A** de probabilitate **p**. Această

Scanned with OKEN Scanner

lege este suma a **n** legi geometrice (independente) de apariţie a evenimentului **A** de probabilitate **p**. Dacă **X** are repartiţie Pascal atunci

$$M(X)=\frac{n}{p},\ D^2(X)=\frac{nq}{p^2},\ \gamma_1=\sqrt{nq},\ \gamma_2=\frac{p^2+6q}{nq}.$$

Exemplul 4. Într-o celulă de *Escherichia coli* există **39** de tipuri diferite de ARN_t (ARN de transfer). Se va admite aici că concentraţiile lor sunt egale. Reamintim schema simplificată a unei sinteze proteice.

a) un *mesager* este format dintr-o înlănţuire liniară de codoni ; la fiecare codon corespunde un tip unic de ARN_t la care este asociat un acic aminic,

b) se acceptă că mesagerul se asociază unui ribozom după următoarea schemă:

- ribozomul este fixat de un codon,
- ARN_t care se deplasează aleator (în mişcare browniană) întâlneşte ribozomul,
- ribozomul testează dacă ARN_t corespunde codonului,
- dacă **da** el încorporează acidul aminic purtat de ARN_t,
- dacă **nu** el respinge ARN_t împreună cu acidul aminic în celulă.

Se cere :

1. care este legea de repartiţie a v.a. care ia ca valori numărul de ARN_t testaţi de ribozom înainte de a găsi un ARN_t de tip convenabil şi care este media acestei legi?
2. ştiind că în medie, într-o secundă, **20** de acizi aminici sunt încorporaţi, care este timpul mediu ce separă începuturile a două teste consecutive ?

Probabilitatea ca un ARN_t prezent pe un ribozom să fie complementar codonului este **1/39**.

Dacă **X** este v.a. care ia ca valori numărul de testări până găseşte un ARN_t de tip convenabil, rezultă

Scanned with OKEN Scanner

$$P(X=1)=\frac{1}{39},\quad P(X=2)=\frac{38}{39}\cdot\frac{1}{39},\quad \ldots\quad ,P(X=n)=\left(\frac{38}{39}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{39},\ldots$$

aici s-a ţinut cont că încercările sunt independente. Rezultă că **X** urmează o lege geometrică. Media v.a. **X** este

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot P(X=i)\quad\Rightarrow\quad M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\left(\frac{38}{39}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{39}=39.$$

Rezultatul final s-a obţinut derivând termen cu termen seria geometrică de raţie **x** şi înlocuind apoi $x=\frac{38}{39}$.

Având în vedere că media sumei de v.a. este suma mediilor v.a. respective, rezultă că media numărului de încercări de a încorpora **20** aminoacizi este $20\times 39=780$. Dacă **T** este timpul mediu pentru o încercare, media timpilor pentru **780** încercări va fi **780T**. De aici rezultă că $T=\frac{1}{780}$ s.

Remarca 1. Dacă **X** este o v.a. cu repartiţie Pascal de ordinul **n** şi parametru **p** atunci **Y=X-n** are repartiţie binomială negativă de parametri **n** şi **p**.

8°. Legea (distribuţia) multinomială

Spunem că vectorul aleator **m**-dimensional $(X_1, X_2,\ldots, X_m)$ *are distribuţie multinomială de parametri* **n** *şi* $p_1, p_2,\ldots, p_m$ $(p_i>0,\ p_1+p_2+\ldots+p_m=1,$ **n** - întreg pozitiv) dacă

$$P(X_1=k_1, X_2=k_2,\ldots, X_m=k_m)=\frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_m^{k_m}$$

unde k_i $(i=1,2,\ldots,m)$ sunt întregi nenegativi şi $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. Denumirea repartiţiei este justificată de faptul că membrul doi al formulei precedente este termenul general al polinomului $(p_1+p_2+\ldots+p_m)^n$.

Situaţia generică în care apare o repartiţie multinomială este următoarea: dacă evenimentele $A_1, A_2,\ldots, A_m$ legate de experienţa *E* formează un sistem complet de evenimente şi au probabilităţile de

Scanned with OKEN Scanner

realizare cunoscute $p_i=P(A_i)$ $(i=1,2,\ldots,m)$, iar X_i $(i=1,2,\ldots,m)$ reprezintă numărul de realizări ale evenimentului A_i $(i=1,2,\ldots,m)$ când repetăm de n ori experiența, atunci vectorul aleator $(X_1, X_2,\ldots, X_m)$ are distribuție multinomială de parametri n și $p_1, p_2,\ldots, p_m$.

O situație concretă în care se evidențiază un astfel de vector aleator este legat de o populație împărțită (pe baza unei relații de echivalență) în m clase $C_1, C_2, \ldots, C_m$ reciproc incompatibile; proporția de indivizi din clasa C_i este p_i. Vom nota cu X_i v.a. care ia ca valoare numărul n_i de indivizi din clasa C_i când se fac n alegeri cu revenire. Evident, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ și $X_1 + X_2 + \ldots + X_m = n$. Fiecare componentă X_i are o lege binomială $\mathcal{B}(n, p_i)$ cu $M(X_i) = np_i$ și $D^2(X_i) = np_iq_i$ (unde $q_i = 1 - p_i$). Trebuie menționat că legea condițională X_i cunoscând că $X_j = n_j$ este tot o lege binomială de tip $\mathcal{B}(n-n_j, p_i/q_j)$; într-adevăr, dacă evenimentul $(X_j = n_j)$ s-a realizat, atunci $P(X_i = n_i / X_j = n_j) = p_i/q_j$.

Vectorul aleator $X = (X_1, X_2,\ldots, X_m)$ are media $\mu = M(X)$

$$\mu = [np_1 \; np_2 \; \ldots \; np_m]^T.$$

Matricea de covarianță a sistemului de v.a. $X_1, X_2,\ldots, X_m$ este

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2,\ldots, X_m) = n \cdot \begin{bmatrix} p_1q_1 & -p_1p_2 & \ldots & -p_1p_m \\ -p_1p_2 & p_2q_2 & \ldots & -p_2p_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p_1p_2 & -p_2p_m & \ldots & p_mq_m \end{bmatrix}$$

§2. Distribuții de tip continuu

1°. Distribuția uniformă pe intervalul [a,b]

Spunem că v.a. X are repartiție uniformă pe intervalul $[a,b]$ dacă are densitatea de repartiție

Scanned with OKEN Scanner

$$\rho(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0 & x\notin[a,b]\end{cases}.$$

Media şi dispersia acestei v.a. sunt, respectiv

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\qquad D^2(X)=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

În cazul particular $a = 0$ şi $b = 1$ v.a. de repartiţie uniformă are următoarele caracteristici numerice:

$m = M(X) = ½$, $D^2(X) = 1/12$, $m_3 = 0$, $\beta_1 = \gamma_{1=0}$, $\beta_2 = 1{,}8$, $\gamma_2 = -1{,}2$.

Pentru repartiţia uniformă pe $[-a,a]$, funcţia caracteristică este

$$\varphi_X(t)=\frac{\sin at}{at}.$$

Pe baza ei şi a formulei $\varphi_{\lambda X+v}(t) = e^{itv}\varphi_X(\lambda t)$ se determină funcţia caracteristică a v.a. cu repartiţie uniformă pe intervalul $[a, b]$ şi toate caracteristicile numerice asociate. Se obţine

$$\varphi_X(t)=\frac{2a}{b-a}e^{i\frac{a+b}{2}t}\,\frac{\sin\frac{b-a}{2}t}{t}.$$

2°. Distribuţia Gama

Spunem că v.a. X are *distribuţie Gama de parametru* r ($r>0$) sau că X are repartiţie γ_r dacă are densitatea de repartiţie

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \dfrac{e^{-x}x^{r-1}}{\Gamma(r)} & x>0\end{cases},$$

unde $\Gamma(r)=\int_0^{\infty}x^{r-1}e^{-x}dx$ (funcţia lui Euler de specia II-a)..

Media, dispersia şi momentele acestei v.a. sunt, respectiv

Scanned with OKEN Scanner

$$M(X) = p, \qquad D^2(X) = p,$$

$$M_k(X) = \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(p)} = p(p+1)...(p+k-1).$$

Funcţia caracteristică a distribuţiei Gama este

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{1-it}.$$

Dacă **X** şi **Y** sunt două v.a. independente cu repartiţii γ_r şi γ_s atunci **X+Y** are repartiţie γ_{r+s}.

În Fig. 5 sunt prezentate grafice ale unor repartiţii ale distribuţiei Gama.

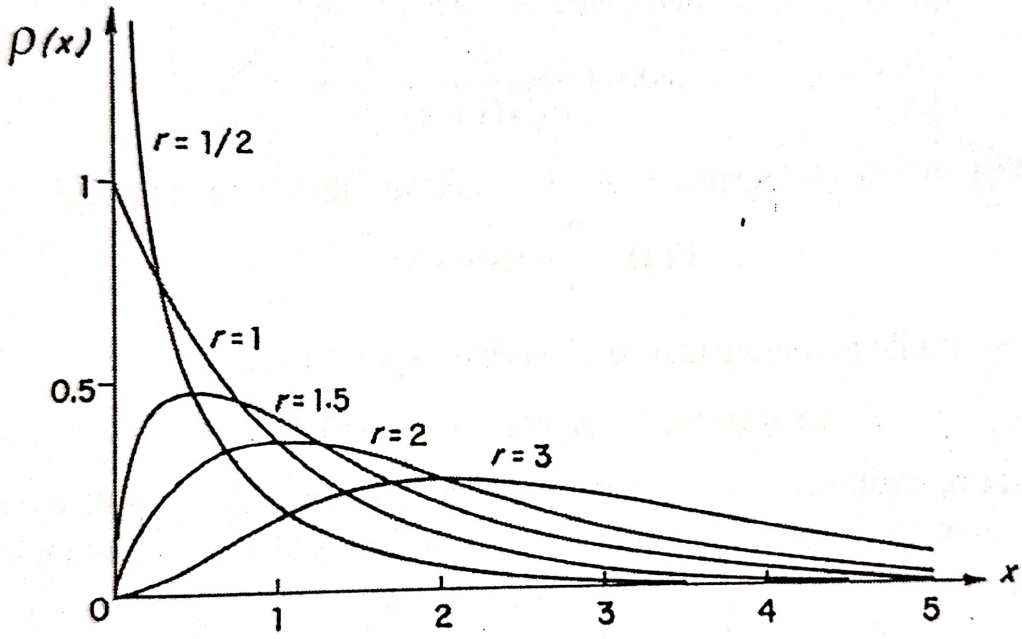


Fig.5

3°. Distribuţii Beta

Spunem că v.a. **X** are *distribuţie Beta de tipul* **I** şi *de parametri* **n** şi **p** (**p>0**) sau că **X** are repartiţie **I(n,p)** dacă are densitatea de repartiţie

Scanned with OKEN Scanner

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & x\notin[0,1]\\ \dfrac{x^{n-1}(1-x)^{p-1}}{B(n,p)} & x\in[0,1]\end{cases},$$

unde $B(n,p)=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{p-1}dx$ (funcţia lui Euler de specia I-a).

Media şi dispersia acestei v.a. sunt, respectiv

$$M(X)=\frac{n}{n+p},\qquad D^2(X)=\frac{np}{(n+p+1)(n+p)^2}.$$

Câteva curbe de densitate de repartiţie sunt reprezentate în Fig.6 .

Legea $I(½,½)$ are densitatea de probabilitate

$$\rho(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

şi poartă numele de legea *arcsinus* deoarece are funcţia de repartiţie

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\,.$$

Caracteristicile numerice uzuale ale acestei repartiţii sunt

$$M(X)=½,\ D^2(X)=⅛,\ \beta_1=0,\ \beta_2=1{,}5\,.$$

Această repartiţie se foloseşte atât în teoria jocurilor cât şi în meteorologie unde dă informaţii asupra frecvenţei "recordurilor" de temperatură.

Scanned with OKEN Scanner

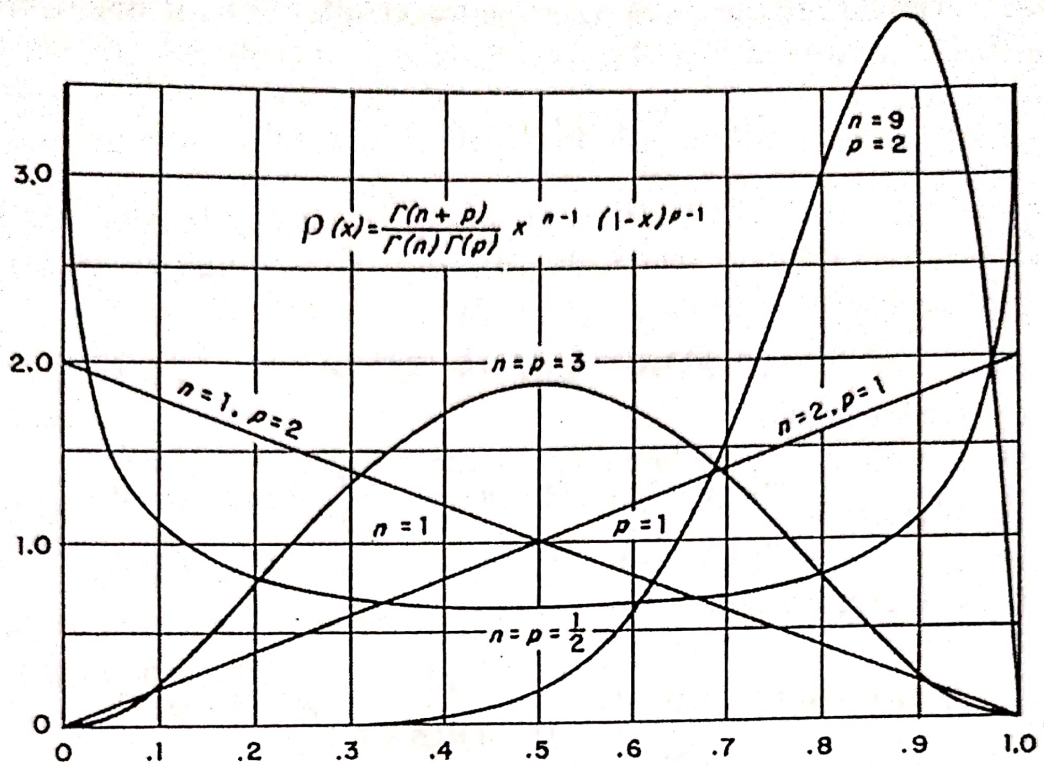


Fig. 6

Dacă **X** are distribuție Beta de tipul **I(n,p)** atunci v.a. $Y=\dfrac{X}{1-X}$ are, prin definiție, *repartiție Beta de tipul* **II** *și parametrii* **n** *și* **p;** spunem că **Y** are repartiție **II(n,p).** Rezultă că **Y** are densitatea de repartiție

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{B(n,p)}\dfrac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+p}} & x\geq 0\end{cases}.$$

Media și dispersia acestei v.a. sunt, respectiv

$$M(X)=\frac{n}{p-1},\qquad D^2(X)=\frac{n(n+p-1)}{(p-2)(p-1)^2}.$$

Raportul a două v.a. independente care au legi de repartiție de tipul γ_p și γ_s este o v.a. cu repartiție **II(n,p)**. Aceste repartiții sunt legate de repartițiile Fisher-Snedecor care se folosesc în statistică.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație. În legătură repartiția binomială, așa cum arată Exemplul 5, este necesar să calculăm sume de forma

$$\psi(p)=\sum_{x=r}^{n} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}\ ,\quad r>0\ .$$

Pentru a calcula această sumă ținem cont că în funcția $\rho(x, p)$ care definește repartiția unei v.a. binomiale parametrul x ia valorile discrete $0, 1, \ldots, n$ iar parametrul p variază continuu în intervalul $[0, 1]$

$$\rho(x,p)=C_n^x p^x (1-p)^{n-x}\ .$$

În plus are loc relația

$$\rho'(x,p)=\begin{cases} n[\rho(r-1,n-1)-\rho(r,n-1)] & \text{daca} \quad r<n \\ n\rho(n-1,n-1) & \text{daca} \quad r=n \end{cases}\ .$$

Prin calcul direct rezultă

$$\psi'(p)=n\rho(r-1,n-1)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}p^{r-1}(1-p)^{n-r}\ .$$

Integrând între 0 și p și ținând cont că $\psi(0)=1$ rezultă

$$\psi(p)-1=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^p t^{r-1}(1-t)^{n-r}dt\ .$$

Pe baza definițiilor funcțiilor gamma și beta (funcțiile lui Euler) și ținând cont că $\Gamma(p)=(p-1)!$ rezultă

$$\psi(p)=1+\frac{1}{B(r,n-r+1)}\int_0^p t^{r-1}(1-t)^{n-r}dt\ .$$

Funcția din membrul drept este numită funcția **beta incompletă** și este o funcție specială pentru care s-au construit tabele în funcție de **p, r, n.** Ea este legată de funcția de repartiție a unei v.a. cu distribuție beta de specia I-a de parametri **p** și **n.**

4°. Distribuția normală

Distribuția normală este distribuția de tip continuu utilizată cel mai des. Este un model teoretic care are avantajul că reprezintă bine

Scanned with OKEN Scanner

distribuţiile frecvenţelor unui număr mare de fenomene naturale. Totuşi această lege este departe de a descrie toate fenomenele fizice. Rolul său fundamental în statistică provine din faptul că ea apare ca lege limită a caracteristicilor legate de un eşantion de talie mare. Această calitate este consecinţa unui rezultat general al teoriei probabilităţilor care afirmă că legea de probabilitate a unei v.a. **X** care este suma unui număr mare de v.a. (cauze) independente două câte două este apropiată de o lege de repartiţie normală dacă numărul cauzelor este mare şi acţiunea individuală a fiecărei cauze este mică în raport cu acţiunea globală a tuturor cauzelor.

Trebuie remarcat că legea normală este legea de distribuţie a erorilor accidentale în orice proces de măsurare.

Spunem că v.a. de tip continuu **X** are *repartiţie* (*distribuţie*) *normală de parametri* **m** *şi* σ^2, sau că **X** are repartiţie $\mathbf{N(m, \sigma^2)}$, dacă are densitatea de repartiţie

$$\rho(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} .$$

Se demonstrează că :

1°. $M(X) = m$, $D^2(X) = \sigma^2$, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, $\beta_2 = 3$, $\gamma_2 = 0$,

2°. graficul funcţiei ρ (Fig.7) are $x=m$ ca axă de simetrie, valoarea maximă $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ şi $m \pm \sigma$ ca puncte de inflexiune,

3°. media, modul şi mediana coincid, adică $m = M_0 = M_e$.

Se vede că forma ei este perfect determinată de medie şi disper-sie (chiar de ecartul tip σ). Dacă v.a. **X** are repartiţie $\mathbf{N(0,1)}$ spunem că are repartiţie *normală standard* sau *repartiţie normală redusă.*

Se stabileşte în mod direct că dacă **X** are repartiţie $\mathbf{N(m,\sigma^2)}$, v.a. $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ este repartiţie normală de tip $\mathbf{N(0,1)}$; **Y** se numeşte şi *nor-*

Scanned with OKEN Scanner

malizata v.a. **X;** mai mult decât atât, dacă v.a **X** are media **m** şi dispersia σ^2 atunci v.a. $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ are media **0** şi dispersia **1** şi se numeşte şi ea **normalizata** v.a. **X.**

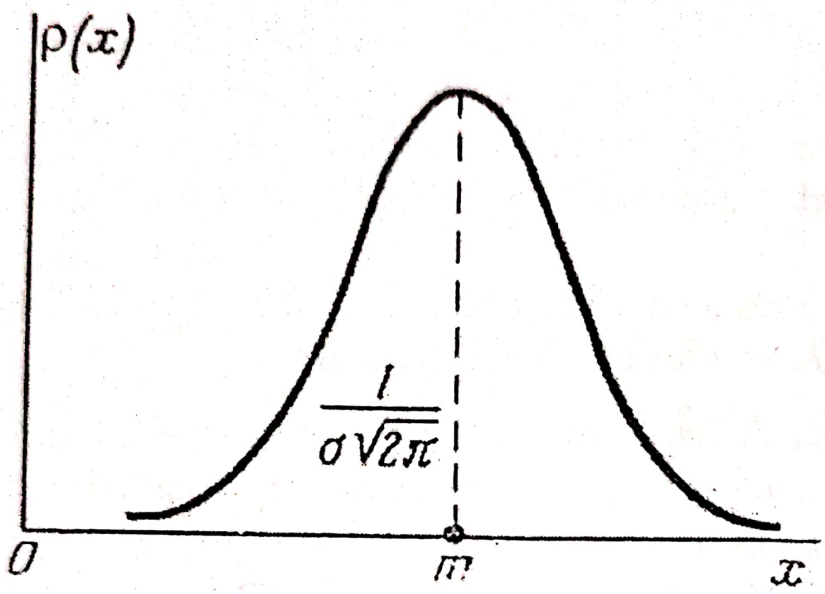


Fig.7

În Fig.8 sunt reprezentate grafic funcţia de repartiţie şi densitatea de probabilitate pentru repartiţia normală standard **N(0,1).**

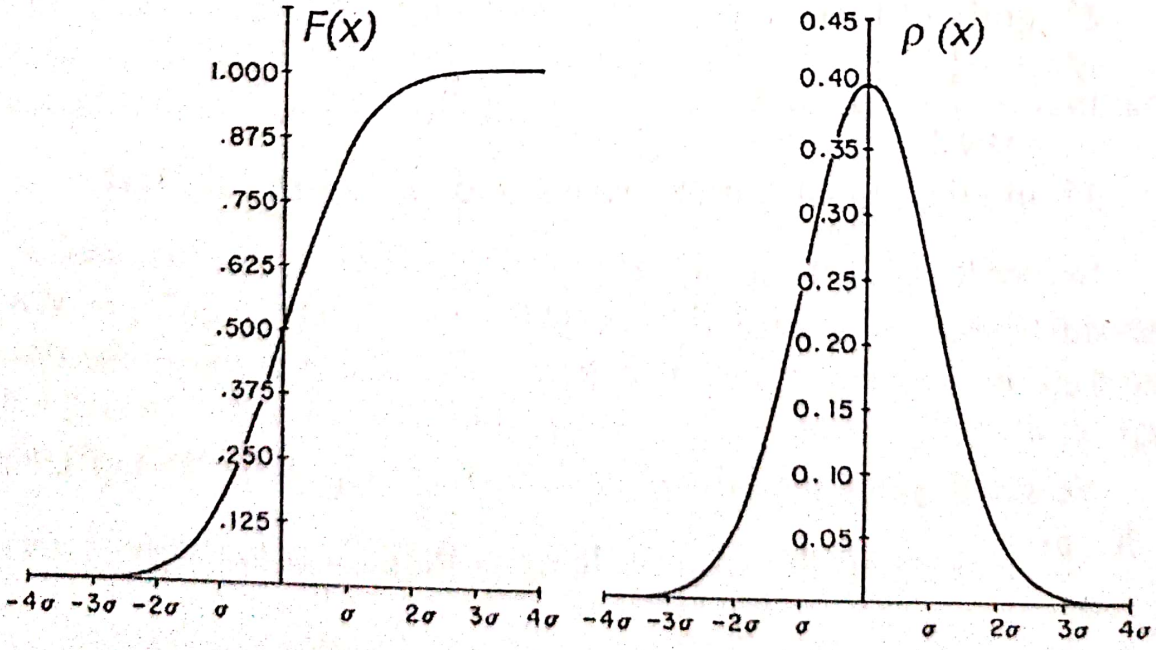


Fig. 8

Scanned with OKEN Scanner

Dacă v.a. **X** are repartiţie normală **N(0,1)**, atunci funcţia de repartiţie a ei este **F:** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

Dependenţa graficelor densităţii de repartiţie de tip $N(m,\sigma^2)$ de parametrii **m** şi σ este ilustrată în Fig.9 şi Fig.10.

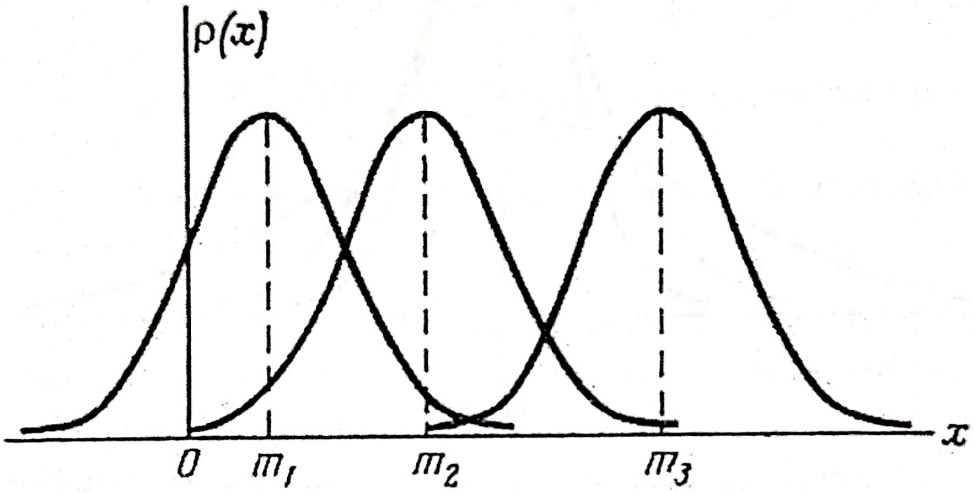


Fig. 9

Graficele din Fig. 9 corespund aceleiaşi dispersii, dar la medii diferite. Este de remarcat faptul că graficele se obţin unul din celălalt prin simple translaţii.

Graficele I, II, III din Fig.10 corespund aceleiaşi valori medii **(m=0)** dar la dispersii descrescătoare $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Pe aceste grafice se evidenţiază faptul firesc că graficul corespunzător celei mai mari dispersii are punctele mai îndepărtate de axa de simetrie.

Scanned with OKEN Scanner

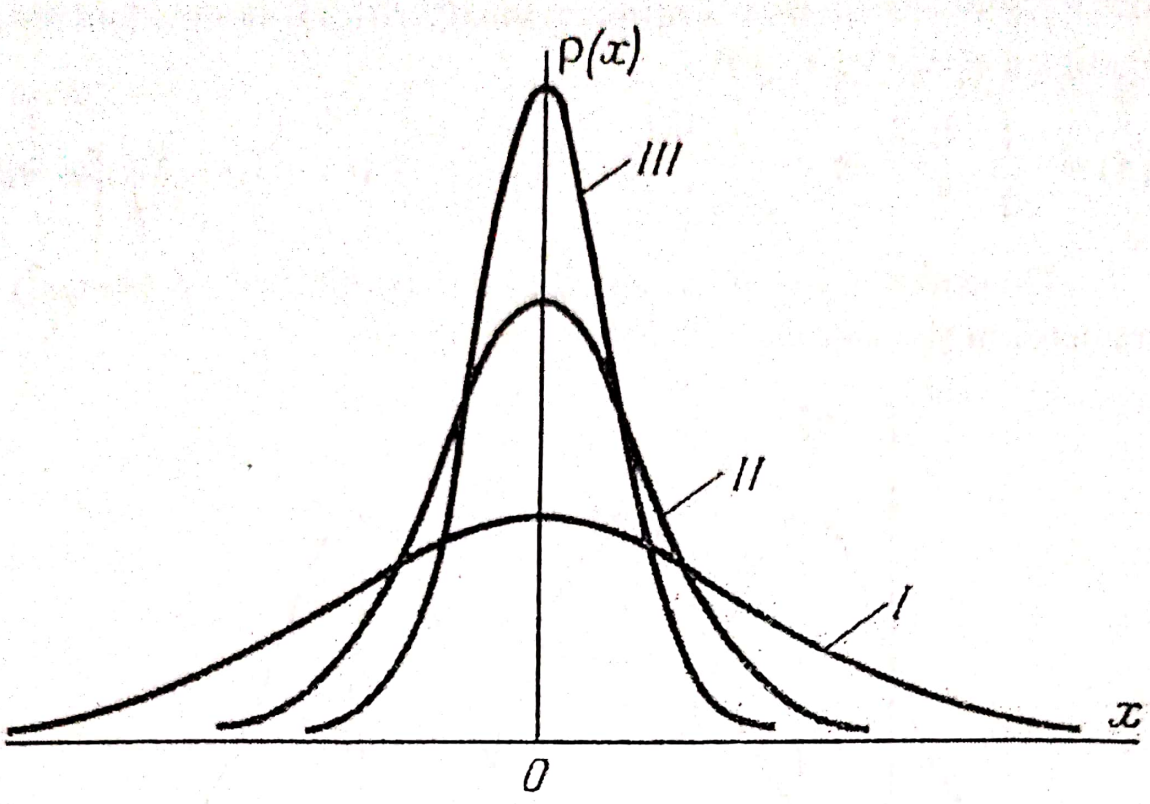


Fig.10

Deoarece primitivele funcției $e^{-\frac{x^2}{2}}$ nu sunt exprimabile prin funcții elementare, pentru determinarea caracteristicilor numerice ale v.a. cu repartiție normală se apelează la funcția specială cunoscută sub numele de *funcția integrală a lui Laplace*, notată cu Φ, definită prin

$$\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Funcția Φ este impară. Importanța funcției Φ a obligat la întocmirea de tabele de valori pentru ea (vezi Anexa 2).

Din definiția funcției Φ rezultă că pentru orice v.a . cu repartiție normală standard **N(0,1)** au loc egalitățile

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) .$$

Tinând cont de procedeul de normalizare rezultă că pentru o v.a. cu repartiție $N(m, \sigma^2)$ are loc formula

$$P(a \le X < b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \le \frac{X-m}{\sigma} < \frac{b-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Pe baza ultimului rezultat se stabileşte că

$$P(|X-m| < k\sigma) = 2\Phi(k).$$

Această formulă şi tabelele pentru funcţia Φ permit evidenţierea următoarelor proprietăţi referitoare la împrăştierea valorilor unei v.a. cu repartiţie $N(m,\sigma^2)$:

- cel puţin 95% dintre valorile ei sunt cuprinse în intervalul $(m - 2\sigma, m + 2\sigma)$,
- cel puţin 99% dintre valorile ei sunt cuprinse în intervalul $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$,
- cel puţin 68% dintre valorile ei sunt cuprinse în intervalul $(m - \sigma, m + \sigma)$.

Prin urmare se poate spune că obişnuinţa de a estima parametrii prin formula $m \pm \sigma$ (m= valoarea medie a parametrului, σ= abaterea standard), în condiţii de normalitate, este criticabilă.

Funcţia caracteristică pentru repartiţia normală $N(m,\sigma^2)$ este

$$\varphi_X(t) = e^{itm} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Ţinând cont că media produsului a două v.a. independente este produsul mediilor lor şi ţinând cont de expresia funcţiei caracteristice pentru repartiţia normală se poate determina funcţia caracteristică a produsului a două v.a. independente cu repartiţii normale.

Fie X o v.a. cu repartiţie normală $N(m_1, \sigma^2)$ şi Y o v.a. cu repartiţie normală $N(m_2, \sigma'^2)$, două v.a. independente. Atunci

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{i(m_1+m_2)} e^{\left(-\frac{t^2}{2}\left(\sigma^2+\sigma'^2\right)\right)}.$$

Rezultă că $X+Y$ urmează o lege normală $N(m_1 + m_2, \sigma^2 + \sigma'^2)$. Am stabilit deci că dacă X_1 şi X_2 sunt v.a. independente de tip $N(m_1, \sigma_1^2)$ şi respectiv $N(m_2, \sigma_2^2)$, atunci $X_1 + X_2$ are repartiţie de tip

$$N\left(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 5. Se ştie că greutatea la naştere a unui purcel din rasa Bazna urmează o distribuţie normală de medie $\mathbf{m = 1,5\ Kg}$ şi o dispersie $\sigma^2 = 0,0256$. Ne propunem să determinăm:

1. probabilitatea să se nască un purcel cu greutatea mai mică decât **1,6 Kg**,
2. probabilitatea să se nască un purcel cu greutatea între **1,2 Kg** şi **1,6 Kg**.

Dacă notăm cu **X** v.a. care ia ca valori greutatea la naştere a purceilor din rasa Bazna atunci rămâne să determinăm $P(X<1,6)$ şi $P(1,2<X<1,6)$. Cum **X** are repartiţie $N(1,5\ ;\ 0,0256)$, variabila normalizată $Y=\dfrac{X-1,5}{\sqrt{0,0256}}$ are repartiţie $N(0,1)$. Prin urmare

$$P(X<1,6)=P\left(\frac{X-1,5}{\sqrt{0,0256}}<\frac{1,6-1,5}{\sqrt{0,0256}}\right)=P(Y<0,625)=$$

$$=\frac{1}{2}+\Phi(0,625)=0,73401$$

Similar se obţine că :

$$P(1,2<X<1,6)=P\left(\frac{1,2-1,5}{\sqrt{0,0625}}<\frac{X-1,5}{\sqrt{0,0625}}<\frac{1,6-1,5}{\sqrt{0,0625}}\right)=$$

$$P(-1,875<Y<0,625)=\Phi(0,625)-\Phi(-1,875)=$$

$$=0,23401+0,46961=0,70362$$

Am menţionat la început că legea normală reprezintă "cazul limită" al multor legi de probabilitate. Prezentăm câteva asemenea rezultate.

1°. Dacă v.a. X_λ $(\lambda > 0)$ are repartiţie Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, atunci funcţia de repartiţie a v.a. $\dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ tinde către funcţia de repartiţie $N(0,1)$ când $\lambda \to \infty$. Se mai spune că v.a. $\dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ este *asimptotic normală.*

Scanned with OKEN Scanner

2°. Dacă v.a. X_n au repartiţie binomială $\mathcal{B}(n,p)$ cu p independent de n, atunci

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx .$$

Acest rezultat are următoarea interpretare utilă pentru conduita în aplicaţiile concrete : *pentru valori "mari" ale lui* **n** *se pot folosi tabelele legii normale pentru studiul v.a. cu distribuţie binomială.* Dacă **n > 30** această interpretare conduce la următoarea **regulă practică** de apreciere a acurateţei aproximării:

- dacă **np > 10, nq > 10** atunci aproximarea este foarte bună,
- dacă *min* **{np, nq}** este cuprins între **5** şi **10** aproximarea este acceptabilă dacă nu este nevoie de mare precizie,
- dacă *min* **{np, nq}** este mai mic decât **5** aproximarea de acest fel nu se foloseşte ; în acest caz se poate folosi aproximarea distribuţiei binomiale prin distribuţia Poisson.

5°. Distribuţia log-normală

Se spune că v.a. **X** are *distribuţie log-normală de parametri* **m** *şi* σ dacă **ln X** are repartiţie $N(m, \sigma^2)$. Densitatea de repartiţie a v.a. **X** este

$$\rho(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} .$$

Media şi dispersia lui **X** sunt :

$$M(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}, \qquad D^2(X) = e^{2m+\sigma^2(e^{\sigma^2}-1)} .$$

În Fig.11 este reprezentată grafic densitatea de repartiţie a v.a. cu distribuţie log-normală, corespunzătoare mediei **2** şi abaterii standard **1**.

Scanned with OKEN Scanner

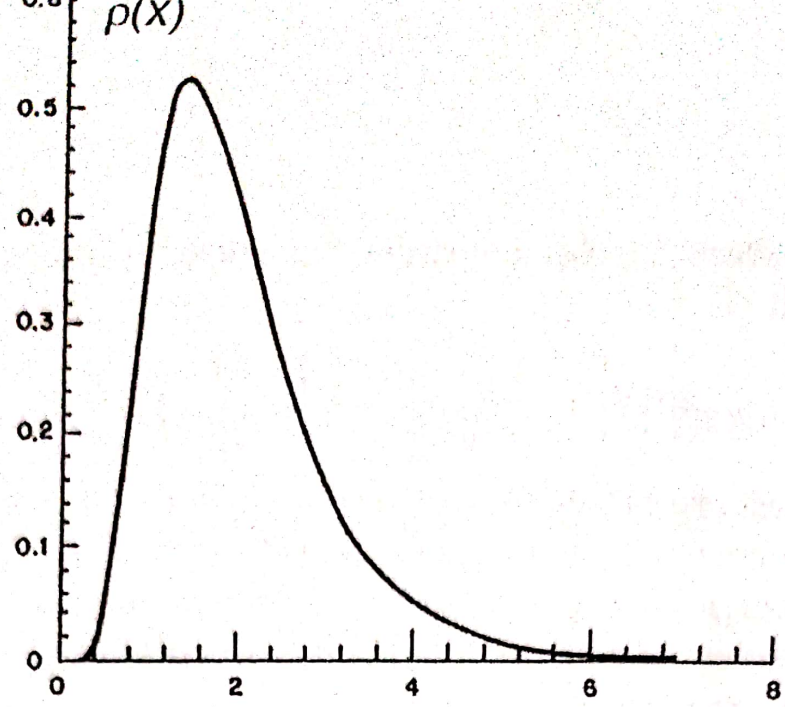


Fig. 11

6°. Distribuția normală multidimensională

Spunem că vectorul aleator $(X_1, X_2,..., X_m)$ are distribuție normală **n**-dimensională dacă are densitatea de repartiție

$$\rho(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T A(x-m)}$$

unde $x=(x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T$, $m=(m_1\ m_2\ \dots\ m_n)^T$, iar **A** este o **n**×**n**-matrice pozitiv definită.

Se demonstrează că $m_j=M(X_j)$ $(j=1,2,\dots m)$, iar

$$A^{-1} = [\mathrm{cov}(X_i, X_j)].$$

Trebuie subliniat următorul rezultat :

Dacă vectorul aleator $(X_1, X_2,..., X_m)$ *are distribuție multinomială de parametri* **n** *și* $p_1, p_2,..., p_m$ *atunci funcția de repartiție a v.a.*

$$Y_m = \left(\frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1q_1}}, \frac{X_2 - np_2}{\sqrt{np_2q_2}}, ..., \frac{X_m - np_m}{\sqrt{np_mq_m}} \right)$$

tinde către funcția de repartiție normală **m-1**–*dimensională cu media* $\mu = [0\ 0\ \dots\ 0]^T$.

7°. Distribuția χ^2

Scanned with OKEN Scanner

Se spune că v.a. **X** are distribuţia χ^2 cu **n** grade de libertate şi parametrul $\sigma > 0$ dacă are densitatea de repartiţie

$$f(x;n,\sigma)=\begin{cases} 0 & \text{daca} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}}{2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{daca} \quad x > 0 \end{cases},$$

aici Γ este funcţia *gamma* a lui Euler definită prin :

$$\Gamma:(-1,\infty) \to \mathbb{R}^+ \qquad \Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt .$$

Pentru o v.a. **X** de distribuţie χ^2 cu **n** grade de libertate şi parametrul $\sigma > 0$, media, dispersia şi funcţia caracteristică sunt respectiv

$$M(X)=n\sigma^2, \quad D^2(X)=2n\sigma^4, \quad \varphi_X(t)=\left(1-2it\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} .$$

Pe baza funcţiei caracteristice se pot determina obişnuit momentele şi momentele centrate

$$M_3(X)=n(n+2)(n+4)\sigma^6 \qquad m_3=8n\sigma^6$$
$$M_4(X)=n(n+2)(n+4)(n+6)\sigma^8 \qquad m_4=12n(n+4)\sigma^8$$

Dacă v.a. **X** are distribuţia χ^2 cu **n** grade de libertate şi parametrul $\sigma > 0$, atunci v.a. $Y=\frac{1}{\sigma^2}X$ are densitatea de repartiţie

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{daca} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{daca} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Se spune în acest caz că **Y** are distribuţia χ^2 cu **n** grade de libertate sau distribuţia χ^2_n sau $\chi^2(n)$.

Din formulele de mai sus se stabileşte că media şi dispersia unei v.a. care are distribuţia χ^2 cu **n** grade de libertate sunt **n** şi respectiv **2n**.

În practică este necesar să cunoaştem valorile funcţiei $\pi(t) = P(X > t)$ unde **X** este v.a. cu distribuţia χ^2 cu **n** grade de libertate. Pentru

Scanned with OKEN Scanner

funcția π s-au construit tabele de valori corespunzătoare valorilor cel mai des utilizate și diferitelor grade de libertate.

Una dintre situațiile concrete în care apar v.a. cu repartiție χ^2 cu **n** grade de libertate este următoarea :

"*Dacă fiecare dintre v.a. independente* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *are repartiție normală* **N(0,1)** *atunci v.a.* $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ *are repartiție* χ^2 *cu* **n** *grade de libertate*".

În statistica inferențială este important și următorul rezultat:

Dacă vectorul aleator $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ *are distribuție multinomială de parametri* **n** *și* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *atunci funcția de repartiție a v.a.*

$$Y_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{np_j}(X_j - np_j)^2$$

tinde către funcția de repartiție χ^2 *cu* **m-1** *grade de libertate.*

Dacă **X** are repartiție χ^2 cu **n>30** grade de libertate atunci se admite că $U = \sqrt{2X} - \sqrt{2n-1}$ are repartiție normală **N(0,1)**. De aici rezultă aproximarea datorată lui Fischer

$$X \approx \frac{(U + \sqrt{2n-1})^2}{2}.$$

O aproximare mai reușită, care este bună chiar și pentru valori mici ale lui **n** este cea propusă de Wilson-Hilferty

$$\sqrt{\frac{9n}{2}}\left[\sqrt[3]{\frac{X}{n}} + \frac{2}{9n} - 1\right] \approx U \in N(0,1)$$

sau

$$X \approx n\left(U\sqrt{\frac{2}{9n}} + 1 - \frac{2}{9n}\right)^3.$$

Se demonstrează că dacă o repartiție χ^2 cu **n** grade de libertate (și parametru σ) are numărul de grade de libertate mare atunci densitatea sa de repartiție are valori apropiate de cele ale unei repartiții normale **N(0, 1)**.

Scanned with OKEN Scanner

În anumite condiții formele pătratice definite pe vectori aleatori gaussieni au lege de repartiție χ^2.

Teorema 1. Dacă **X** este un vector aleator cu **m** componente având ca medie vectorul μ şi matricea de covarianţă regulată Σ atunci v.a. $D^2=(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$ are repartiție χ^2_m.

Teorema 2. Dacă **Y** este un vector gaussian centrat redus, forma pătratică $Q = Y^TAY$ are repartiție χ^2 dacă şi numai dacă $A^2=A$. În acest caz numărul de grade de libertate al repartiției χ^2 este egal cu rangul matricei **A**.

Reamintim că teorema lui Craig asigură că formele pătratice Q_1 şi Q_2 definite pe vectorul aleator m-dimensional **Y** prin matricele A_1 şi A_2 sunt v.a. independente dacă şi numai dacă $A_1A_2=0$.

Teorema lui Cochran. Fie $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ - forme pătratice definite pe vectorul aleator m-dimensional **Y** care realizează o descompunere a pătratului normei lui **Y**, adică $\sum_{i=1}^{k} Q_i = \sum_{j=1}^{m} Y_j^2$. Atunci următoarele trei condiții sunt echivalente:

- $\sum_{i=1}^{k} \text{rang } Q_i = m$,
- fiecare Q_j este o variabilă cu repartiție χ^2, adică $A_j^2 = A_j$, $j=1, 2, \ldots, k$,
- v.a. Q_j sunt reciproc independente (adică $A_iA_j=0$, $i\neq j$).

8°. Distribuția Student

Se spune că v.a. **X** are *distribuţie Student* cu **n** grade de libertate dacă are densitatea de repartiție

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \forall x\in R\ .$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin calcul direct se stabileşte că media şi dispersia unei v.a. **X** cu distribuţie Student cu **n** grade de libertate sunt

$$M(X) = 0 \qquad D^2(X) = \frac{n}{n-2} \qquad (n > 2).$$

Deoarece media este zero, momentele coincid cu momentele centrate corespunzătoare; pe de altă parte, graficul lui **f** este simetric faţă de axa **Oy** deci toate momentele de ordin impar sunt nule. Pentru momentele de ordin par avem:

$$M_4(X) = m_4 = \frac{3n^2}{(n-2)(n-4)}, \quad M_6(X) = m_6 = \frac{15n^3}{(n-2)(n-4)(n-6)}$$

Dacă v.a. **X** şi **Y** au repartiţiile **N(0,1)** şi respectiv $\chi^2(n)$ atunci v.a.

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

are repartiţie Student cu **n** grade de libertate.

Acest rezultat are următoarea consecinţă utilă în statistica inferenţială: dacă v.a. $X_1, X_2, ..., X_{n+1}$, au fiecare lege normală **N(0, 1)** atunci v.a.

$$T = \sqrt{n} \cdot \frac{X_{n+1}}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}}$$

are repartiţie Student cu **n** grade de libertate.

De asemenea se demonstrează că dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ au repartiţie **N(0, 1)** atunci

$$Y = \sqrt{n(n-1)} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2}}$$

are repartiţie Student cu **n-1** grade de libertate.

Repartiţia Student are aplicaţii importante în statistica inferenţială. Importanţa ei derivă din faptul că se aplică la studiul populaţiilor pe baza selecţiilor de volum mic. O proprietate remarcabilă a acestei legi

Scanned with OKEN Scanner

constă în faptul că depinde numai de parametrii selecției calculați nemijlocit pe baza datelor de observație (este independentă de dispersia populației).

Este de mare importanță observația că dacă numărul de grade de libertate ale unei legi Student este mare, graficul densității de repartiție este apropiat de cel al unei repartiții normale standard **N(0, 1)**.

În teoria selecției v.a.

$$t = \sqrt{n-1}\,\frac{\tilde{X} - M}{\sigma'}$$

în care $\tilde{X}$ este media de selecție (vezi [2] pag.208), σ' este dispersia de selecție (vezi [2] pag. 209) iar **n** este volumul selecției este o v.a. cu repartiție Student cu **n-1** grade de libertate.

Repartiția Student corespunzătoare lui **n=1** se numește *repartiție Cauchy*. Densitatea de probabilitate a unei repartiții Cauchy este

$$\rho(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}, t \in \mathbb{R}.$$

O proprietate interesantă a legii Cauchy este că nu are nici-un moment finit. Câtul a două v.a. cu repartiție normală redusă este o v.a. cu repartiție Cauchy.

9°. Distribuția Snedecor. Distribuția Fisher

Se spune că v.a. **X** are *distribuție Snedecor* cu parametrii n_1 și n_2 dacă are densitatea de repartiție

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{dacă} \quad x < 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \quad \text{dacă} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Aici n_1 și n_2 sunt numere naturale **(> 0)** numite *grade de libertate*.

Scanned with OKEN Scanner

V.a. **X** care are distribuţie Snedecor cu n_1, n_2 grade de libertate ($n_2>0$) are

$$M(X)=\frac{n_2}{n_2-2},\quad D^2(X)=\frac{2n_2^2}{n_1}\frac{n_1+n_2-2}{(n_2-2)^2(n-4)}.$$

Această lege se mai numeşte şi legea $F(n_1, n_2)$ a lui Fischer-Snedecor.

Trebuiesc menţionate rezultatele următoare:

- dacă **X** şi **Y** sunt v.a. independente de repartiţii $\chi^2_{n_1}$ şi $\chi^2_{n_2}$ atunci

$Z=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ are repartiţie $F(n_1, n_2)$,

- dacă v.a. **Y** are lege de repartiţie **beta II**(n_1, n_2) atunci v.a. $\frac{n_2 Y}{n_1}$ are repartiţie $F(2n_1, 2n_2)$,

- dacă v.a. **Y** are lege de repartiţie **beta I**(n_1, n_2) atunci v.a. $\frac{n_2}{n_1}\frac{Y}{1-Y}$ are repartiţie $F(2n_1, 2n_2)$

- dacă v.a. **X** are repartiţie normală $N(0,1)$ atunci X^2 are repartiţie χ^2 cu un grad de libertate, iar $\frac{1}{2}X^2$ are repartiţie gamma de parametru $\frac{1}{2}$.

O consecinţă a primului rezultat, utilă în statistica inferenţială, este: *dacă v.a. independente* $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}, X_{n_1+1}, \ldots X_{n_1+n_2}$ *au repartiţie* $N(0, 1)$ *atunci v.a* $\frac{n_2}{n_1}\frac{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_{n_1}^2}{X_{n_1+1}^2+\ldots+X_{n_1+n_2}^2}$ *are repartiţie Snedecor de parametri* n_1 *şi* n_2.

Aceste rezultate ne arată că putem folosi tabelele numerice ale repartiţiei Fisher-Snedecor pentru determinarea valorilor numerice ale unor repartiţii beta I şi beta II.

Scanned with OKEN Scanner

Se spune că v.a. **X** are *distribuţie Fisher* cu parametrii n_1 şi n_2 dacă are densitatea de repartiţie

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot e^{n_1 x}\left(1+\frac{n_1}{n_2}e^{2x}\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}.$$

Se demonstrează că dacă v.a. **X** are distribuţia Snedecor cu parametrii n_1 şi n_2 atunci v.a. $Y = \frac{1}{2} \ln X$ are distribuţie Fisher cu parametrii n_1 şi n_2.

10°. Distribuţia Weibull. Legea exponenţială

Spunem că v.a. **X** are *distribuţie Weibull de parametri* λ *şi* α (λ, $\alpha>0$) dacă densitatea sa de repartiţie este

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \lambda\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^{\alpha}} & x > 0 \end{cases}.$$

Media şi dispersia acestei v.a. sunt respectiv

$$M(X) = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right), \qquad D^2(X) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right].$$

În cazul particular $\alpha=1$ se obţine *distribuţia exponenţială de parametru* λ.

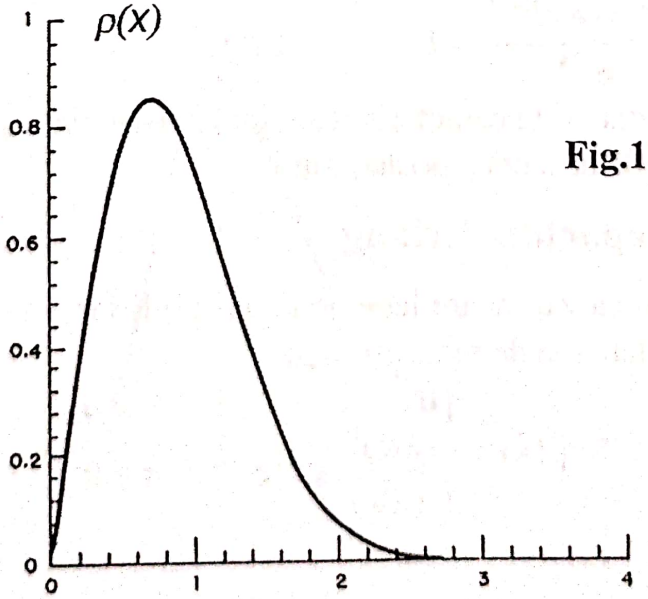


Fig.12

Scanned with OKEN Scanner

În Fig. 12 este reprezentată grafic densitatea de repartiție Weibull corespunzătoare lui $\lambda=1$ și $\alpha=2$. Distribuția Weibull se utilizează în studiul fiabilității materialelor.

Spunem că v.a. **X** are *distribuție exponențială de parametru* λ ($\lambda>0$) dacă densitatea sa de repartiție este

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x>0\end{cases}.$$

Media și dispersia acestei v.a. sunt respectiv

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\qquad D^2(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Funcția de repartiție este $F(t)=1-e^{-\lambda t}$ pentru $t>0$.

Distribuția exponențială se utilizează în studiul duratei de viață a componentelor electronice.

În teoria așteptării este importantă următoarea proprietate a repartiției exponențiale: dacă $F_\tau(t)=P(X-\tau<t \mid X>\tau)$, atunci $F_\tau(t)=F(t)$. Într-adevăr, ținând cont de echivalența de evenimente $(X>\tau)\cap(X-\tau<t)=(\tau<X<t+\tau)$ rezultă

$$F_\tau(t)=\frac{P[(X>\tau)\cap(X-\tau<t]}{P(X>\tau)}=\frac{F(t+\tau)-F(\tau)}{1-F(\tau)}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda\tau}-e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}}=1-e^{-\lambda t}=F(t).$$

Această proprietate este caracteristică legii exponențiale și este o formulare a condiției de absență a postacțiunii.

11°. Repartiția Erlang

Spunem că v.a. **X** are lege de repartiție Erlang de parametri $\lambda>0$, $k\ge 1$ dacă densitatea sa de repartiție este

$$\rho(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{(\lambda k)^k}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-\lambda k x} & x\ge 0\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru **k=1** se obține densitatea de probabilitate a repartiției exponențiale negative de parametru **λ>0**; în cazul **λk=1** repartiția Erlang coincide cu repartiția gamma.

Media, dispersia și momentele v.a. **X** sunt

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D^2(X)=\frac{1}{k\lambda^2},\quad M_r(X)=\frac{\Gamma(k+r)}{(\lambda k)^r\Gamma(k)}.$$

Repartiția Erlang este folosită în teoria sistemelor de așteptare.

12°. Legea lui Gumbel

Spunem că v.a. **X** are lege de repartiție Gumbel dacă densitatea sa de repartiție este

$$\rho(x)=e^{(-x-e^{-x})},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Media sa este chiar constanta lui Euler **M(X)=0,57722...**, iar dispersia este $D^2(X)=\frac{\pi^2}{6}$. În plus γ_1=1,29857, γ_2 = 5,4 Densitatea de probabilitate pentru o distribuție Gumbel este reprezentată grafic în Fig.13.

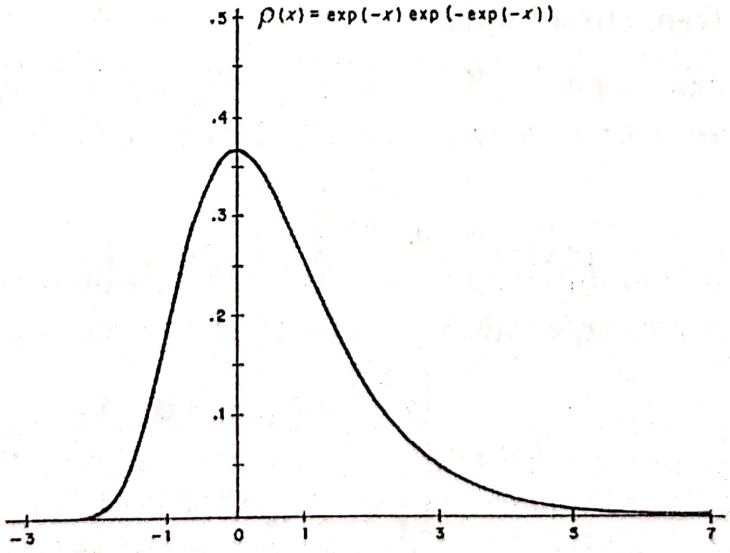


Fig.13

Scanned with OKEN Scanner

Legea lui Gumbel modelizează fenomene cu distribuţii de valori extreme cum ar fi creşterea embrionară, creşterea cotelor apelor unui râu după ploi puternice, magnitudinea cutremurelor de pământ, etc..

13°. Repartiția Pareto

Se spune că o v.a. **X** are *repartiţie Pareto* de parametri **c>0** şi **α>0** dacă funcţia ei de repartiţie este de forma

$$F(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{c}{x}\right)^{\alpha} & x>c\\ 0 & c\le c\end{cases}.$$

Se stabileşte prin calcul direct că

$$M(X)=\frac{\alpha}{1-\alpha}c \qquad \text{daca} \quad \alpha>1$$

$$D^2(X)=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2(\alpha-2)^2}c^2 \qquad \text{daca} \quad \alpha>2$$

Dacă $\alpha\in(0,1]$ v.a. **X** nu are medie iar dacă $\alpha\in(0,2]$ v.a. **X** nu are dispersie.

14. Repartiția Laplace

Se spune că o v.a. **X** are *repartiţie Laplace* sau *repartiţie exponenţială bilaterală de parametru* $\lambda\in\mathbb{R}$, dacă are densitate de repartiţie de forma

$$\rho(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda>0, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Funcţia ei de repartiţie este

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}e^{-\lambda x} & x>0\\ \dfrac{1}{2}e^{\lambda x} & x\le 0\end{cases}.$$

În plus, $M(X)=0$ şi $D^2(X)=\dfrac{2}{\lambda^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

15. Legea lui Wishart

Se spune că o p×p- matrice are distribuţie Wishart $\mathbf{W_p(n, \Sigma)}$ dacă **M** se poate reprezenta sub forma $\mathbf{X^TX}$ unde **X** este o n×p-matrice aleatoare care areproprietatea că cele n linii ale sale sunt vectori aleatori gaussieni independenţi, de aceeaşi lege **N(0, Σ).**

O astfel de distribuţie apare când **X** reprezintă un eşantion de n observaţii independente pentru o lege normală multidimensională.

Se demonstrează că densitatea de probabilitate a legii Wishart este

$$\rho(M) = \frac{|M|^{(n-p-1)/2} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\Sigma^{-1}M}}{2^{np/2}\pi^{p9p-10/4}|\Sigma|^{n/2}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+i-1)\right)}$$

unde **M** este o matrice pozitiv semidefinită iar $\mathbf{Tr\ (\Sigma^{-1}M)}$ este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $\mathbf{\Sigma^{-1}M}$.

Într-un anumit sens legea Wishart generalizează legea χ^2.

Se demonstrează că dacă **Y** este un vector aleator independent de **M** atunci $\frac{Y^TMY}{Y^T\Sigma Y}$ şi $\frac{Y^T\Sigma^{-1}Y}{Y^TM^{-1}Y}$ urmează respectiv legile χ^2**(n)** şi χ^2**(n-p+1)** şi sunt v.a. independente de **Y.**

Dacă **M** şi **N** sunt două matrice Wishart independente $\mathbf{W_p(m,}$ $\mathbf{\Sigma)}$ şi $\mathbf{W_p(n, \Sigma)}$ cu $\mathbf{m \geq p}$ atunci v.a.

$$\Lambda = \frac{|M|}{|M+N|}$$

urmează, **prin definiţie**, o lege Wiks de parametri **p, m** şi **n**; acestă distribuţie se notează cu **Λ(p, m, n)** pentru că nu depinde de Σ.

16. Legea T^2 a lui Hotelling

Dacă **X** este un vector aleator cu repartiţie normală $\mathbf{N_p(0,I)}$ iar **M** este o matrice Wishart $\mathbf{W_p(N, I)}$ independentă de **X** atunci **prin definiţie** v.a. $\mathbf{nX^TM^{-1}X}$ urmează o lege $\mathbf{T^2}$ a lui Hotelling de parametri **p** şi **n** şi se va scrie $\mathbf{T_p^2 = nXTM^{-1}X}$.

Scanned with OKEN Scanner

Legea T^2 a lui Hotelling se leagă puternic de legea Fisher-Snedecor prin formula

$$T_p^n = \frac{np}{n-p+1} F(p; n-p+1).$$

Pentru **p=1** devine pătratul unei repartiţii Student cu n grade de libertate pentreu că $T_1^2 = F(1;n)$.

§3. Convoluţia

Una din cele mai obişnuite probleme este cea a determinării legii de repartiţie a sumei a două v.a. independente. Dacă **Z= X+Y** atunci, în cazul v.a. de tip discret rezultă

$$P(Z=z) = \sum_x P((X=x) \cap (Y=z-x)) = \sum_x P(X=x)P(Y=z-x)$$

$$P(Z=z) = \sum_y P((X=z-y) \cap (Y=y)) = \sum_y P(X=z-y)P(Y=y).$$

De exemplu, dacă **X** şi **Y** sunt v.a. cu repartiţii Poisson de parametri λ şi μ atunci

$$P(Z=z) = \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} C_z^x \lambda^x \mu^{z-x} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} (\lambda+\mu)^z$$

adică **Z=X+Y** are repartiţie Poisson de parametru $\lambda+\mu$.

În cazul a două v.a. de tip continuu, de densităţi de repartiţie ρ şi θ suma de mai sus se transformă în produsul de convoluţie

$$\kappa(z) = \int_{D_X} \rho(u)\theta(z-u)du = \int_{D_Y} \rho(z-u)\theta(u)du .$$

§4. Şiruri de variabile aleatoare

Este binecunoscut cã pentru şirurile de funcţii existã multe noţiuni de convergenţã. Aceleaşi noţiuni vor exista şi pentru şirurile de v.a.. În plus vor exista şi noţiuni specifice de convergenţã, deoarece şirurile de v.a. sunt şiruri de funcţii măsurabile definite pe spaţii particu-

Scanned with OKEN Scanner

lare. Vom prezenta în cele ce urmează câteva noţiuni de convergenţă ale şirurilor de v.a..

Definiţia 1. Se spune că şirul de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *convergent în probabilitate la v.a.* X şi scriem $X_n \xrightarrow{p} X$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$ şi $\forall \eta > 0$ există $N(\varepsilon,\eta) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \eta, \quad \forall n \geq N(\varepsilon,\eta) .$$

Ca de obicei se înţelege că

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) .$$

Trebuie remarcat că are loc echivalenţa

$$X_n \xrightarrow{p} X \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

Un caz particular de interes deosebit este cel în care v.a. X este constantă.

Prezentăm următoarele proprietăţi ale convergenţei în probabilitate :

1°. dacă $X_n \xrightarrow{p} X$ şi $X_n \xrightarrow{p} Y$ atunci $P(X=Y)=1$,

2°. dacă $X_n \xrightarrow{p} X$ şi $Y_n \xrightarrow{p} Y$ atunci

$$\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{p} \alpha X + \beta Y ,$$

3°. dacă $X_n \xrightarrow{p} X$ atunci $|X_n| \xrightarrow{p} |X|$.

Definiţia 2.a) Spunem că v.a. X şi Y sunt *egale aproape sigur* dacă

$$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}) = 0 .$$

b) Se spune că şirul de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *convergent aproape sigur la v.a.* X şi scriem $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ dacă

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1 .$$

Convergenţa a.s. implică convergenţa în probabilitate adică dacă $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ atunci $X_n \xrightarrow{p} X$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 3. Se spune că șirul de v.a. $(X_n)_{n\in N}$ este *convergent în repartiție la v.a.* X *cu funcția de repartiție* F și scriem $X_n \xrightarrow{r} X$ dacă în toate punctele de continuitate ale lui F șirul $(F_n)_{n\in N}$ al funcțiilor de repartiție ale v.a. X_n converge punctual la F.

Convergența în probabilitate implică convergența în repartiție, adică dacă $X_n \xrightarrow{p.} X$ atunci $X_n \xrightarrow{r} X$.

Este de remarcat că (teorema lui G.Polya) dacă funcția de repartiție F este continuă pe $\mathbb{R}$ și este limita punctuală a unui șir de funcții de repartiție $(F_n)_{n\in N}$ atunci convergența este chiar uniformă, adică $F_n \xrightarrow{u} F$.

Convergența în repartiție este intim legată de convergența funcțiilor caracteristice. Are loc rezultatul dat de teorema următoare.

Teorema Levy-Cramer-Dugué. Dacă $X_n \xrightarrow{r} X$ atunci

$$\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$$

uniform pe orice interval finit **[-u,u]**. Invers, dacă șirul de funcții caracteristice φ_{X_n} converge la o funcție φ a cărui parte reală este continuă în origine, atunci φ este o funcție caracteristică și șirul de v.a. $(X_n)_{n\in N}$ converge în repartiție la o v.a. X pentru care φ este funcție caracteristică.

Un rezultat similar se poate dovedi pentru șirurile de funcții generatoare.

Teorema 1. Fie $(X_n)_{n\in N}$ un șir de v.a. care iau valori întregi nenegative. Presupunem că șirul $(F_n)_{n\in N}$ al funcțiilor de repartiție corespunzătoare este convergent la funcția de repartiție F a v.a X. Să notăm

Scanned with OKEN Scanner

$$p_{nk} = P(X_n = k), \quad k = 0,1,2,...$$
$$p_k = P(X = k)$$
$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} z^k, \quad |z| \le 1$$
$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad |z| \le 1.$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} p_{nk} = p_k, \quad k = 0,1,2,..., \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z).$$

Invers, fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de v.a. care iau valori întregi nenegative. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z)$$

atunci şirul de funcţii de repartiţie corespunzătoare converge către o funcţie de repartiţie a cărei funcţie generatoare este $G(z)$.

În cazul v.a. discrete convergenţa în repartiţie se exprimă prin

$$P(X_n = x) = P(X = x).$$

Deseori este utilizată, pentru comoditatea cu care poate fi mânuită, convergenţa în medie de ordinul **p**.

Se spune că şirul de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în media de ordinul **p** la v.a. **X** dacă $M(|X_n - X|^p) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Convergenţa în medie de ordinul **p** implică convergenţa în probabilitate. Cel mai des este folosită convergenţa în medie de ordinul **p=2.**

Prezentăm câteva rezultate care evidenţiază legăturile care există între diferitele tipuri de v.a..

Definiţia 4. Se spune că şirul de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *stabil* dacă există un şir de v.a. constante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a_n| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

Şirul stabil de v.a. pentru care $a_n = M(X_n)$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte şir *normal-stabil*.

Teorema lui Cebîşev. Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de v.a. independente două câte două. Considerăm şirul de v.a. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unde

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}, \ (n \in \mathbb{N}).$$

Dacă şirul dispersiilor $(D^2(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, atunci şirul $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este normal stabil. Dacă în plus, v.a. au aceeaşi medie $m = M(X_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ atunci $Y_n \xrightarrow{p.} m$.

§5. Legea numerelor mari. Teorema limită centrală

Legea numerelor mari stabileşte legătura dintre frecvenţă ca v.a. şi probabilitate. La rândul lor, diversele variante ale teoremei limită centrală justifică faptul că numeroase distribuţii sunt aproximativ normale în sensul că au caracteristicile numerice apropiate de cele ale unei repartiţii normale şi că graficele densităţilor lor de probabilitate sunt apropiate de graficul unei repartiţii normale.

Teorema lui Bernoulli. Fie **p** probabilitatea apariţiei unui eveniment **A** într-o experienţă ***E*** şi ν_n v.a care ia ca valori frecvenţa relativă de realizare a lui **A** în **n** probe independente. Atunci şirul $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în probabilitate la **p.**

Această teoremă este cunoscută şi sub numele de *legea numerelor mari.* Legea numerelor mari se mai numeşte şi *regularitate statistică.* Această regularitate statistică se manifestă în felul următor:

Scanned with OKEN Scanner

dacă se fac mai întâi **n** determinări independente $x_1, x_2, \ldots x_n$ apoi **m** determinări independente $y_1, y_2, \ldots y_m$ ale caracteristicii **X** atunci numerele

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{şi} \quad \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{m}$$

sunt apropiate ca valoare atunci când **n** şi **m** sunt numere mari.

Este important de subliniat faptul că *teorema lui Bernoulli nu demonstrează că inegalitatea* $|\nu_n - p| < \varepsilon$ *este satisfăcută pentru* ***n*** *suficient de mare, ci faptul că această inegalitate are şansă mare să fie realizată experimental, adică* $P(|\nu_n - p| < \varepsilon)$ *este foarte apropiată de* **1**.

Aplicaţie. Să aplicăm legea numerelor mari la rezolvarea următoarei probleme. Într-o urnă se află un număr necunoscut de bile albe şi bile negre. Să se determine câte bile trebuiesc extrase din urnă, repunând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă, astfel încât, cu o probabilitate de cel puţin **0,9** frecvenţa relativă a numărului de bile albe extrase să se abată de la probabilitatea de extragere a unei bile albe cu cel mult **0,05**.

Pentru fiecare **n** fixat considerăm v.a. X_n care ia ca valori numărul de bile albe obţinute în cele **n** extrageri independente. Rezultă că v.a. $\frac{1}{n}X_n$ ia ca valori frecvenţele relative cu care se extrag bile albe în cele **n** extrageri. Legea numerelor mari ne asigură că putem aproxima **p** prin frecvenţa relativă. Eroarea comisă aproximând **p** prin frecvenţa relativă se estimează cu ajutorul inegalităţii lui Cebîşev şi anume :

$$P\left(\left|\frac{1}{n}X_n - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D^2\left(\frac{1}{n}X_n\right)}{\varepsilon^2}.$$

Deoarece X_n este v.a. cu repartiţie binomială are dispersia **npq** (cu **q**= **1-p**) şi inegalitatea precedentă devine $P\left(\left|\frac{1}{n}X_n - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$. În problema noastră este suficient să determinăm **n** astfel încât

Scanned with OKEN Scanner

$$P\left(\left|\frac{1}{n}X_n - p\right| < 0{,}05\right) > 1 - \frac{pq}{n(0{,}05)^2} > 0{,}9 .$$

Pe baza inegalității mediilor rezultă că $p+q = 1$ implică $0 \le pq \le 1/4$. Este suficient deci să determinăm n ca soluție a inecuației $1 - \frac{1}{4n(0{,}05)^2} > 0{,}9$. Rezultă că $n>1000$ este o estimare a răspunsului la problemă.

În cazul în care extragerea ar fi fost fără revenire, v.a. X_n ar fi avut repartiție hipergeometrică și dispersia $D^2(X_n) = npq\frac{t-n}{t-1}$. Inegalitatea lui Cebîșev devine

$$P\left(\left|\frac{1}{n}X_n - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq(t-n)}{n\varepsilon^2(t-1)} > 1 - \frac{t-n}{4n(t-1)\varepsilon^2} > 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} .$$

Prin urmare, $n>1000$ este soluție a problemei și în cazul extragerilor fără revenire. Dacă volumul t al populației ar fi fost cunoscut, s-ar fi obținut o estimare mai bună pentru n.

O generalizare a teoremei lui Bernoulli este realizată de Poisson.

Teorema lui Poisson. Fie α numărul de apariții ale unui eveniment A în n experiențe și p_k probabilitatea de realizare a lui A în experiența de rang k. Atunci aproape sigur există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} = p$$

și șirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al frecvențelor relative converge în probabilitate către p.

Acest rezultat a fost îmbunătățit de Markov.

Teorema lui Markov. Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de v.a. independente două câte două. Dacă

1) $M(X_k)=M_k$, $D(X_k)=\sigma_k$, $k\in\mathbb{N}$, sunt finite,
2) limita

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M_k = M$$

există şi este finită,

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2} = 0$,

atunci şirul de v.a. $\left(Y_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right)_{n\in N}$ converge în probabilitate către **M**.

Cele trei teoreme de mai sus pun în evidenţă existenţa unor şiruri de v.a. care converg în probabilitate la o constantă. În această tendinţă se manifestă acţiunea obiectivă a legii numerelor mari. Esenţa legii numerelor mari constă în aceea că ea este valabilă pentru un ansamblu de fenomene şi nu pentru fiecare fenomen în parte al acestui ansamblu.

Ne ocupăm acum de aşa-numita *teorema limită centrală*. În fapt este vorba de o serie de teoreme care justifică rezultate asemănătoare. Unul dintre meritele deosebite ale teoremelor de acest tip este că pun în evidenţă rolul important al repartiţiei normale. Pentru comoditatea prezentării introducem noţiunea de *normalitate asimptotică*. Se spune că şirul de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este asimptotic normal dacă şirul de v.a. $\left(U_n = \frac{X_n - M(X_n)}{\sqrt{D^2(X_n)}}\right)_{n\in N^*}$ este convergent în repartiţie la o v.a. cu repartiţie **N(0, 1)**. În practică această proprietate este exploatată considerându-se că unul dintre termenii U_n are repartiţie normală redusă (standard) dacă **n** este mare.

Teorema Moivre-Laplace. Dacă $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de v.a. independente cu repartiţii binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ atunci

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{r} X$$

unde **X** are repartiție **N(0,1).**

Această teoremă permite să aproximăm legea binomială printr-o lege normală. În practică se face o astfel de aproximare dacă **np > 5** și **nq > 5;** unii autori acceptă o astfel de aproximare numai dacă **npq>9.**

Exemplul 8. Se știe că **25‰** din piesele fabricate de o mașină sunt rebuturi. Să se determine cu probabilitatea egală cu **0,95** un interval în care se găsește numărul de piese bune din **5000** de piese fabricate.

Fie X_n v.a. care ia ca valori numărul de piese bune dintr-un lot de **n** piese. X_n are repartiție binomială cu **p=0,975.** Căutăm. intervalul de forma $| X_n - np | < k(npq)^{1/2}$, deoarece este natural să implicăm dispersia v.a.. Mai exact, dorim să determinăm intervalul, adică să determinăm pe **k,** astfel incât $P(| X_n - np | < k(npq)^{1/2})=0,95.$ Ținând cont că **np=5000. 0,975=4875>5, nq=5000. 0,025=125>5 (npq = =5000. 0,975. 0,025=121,875>9)** rezultă că putem considera că v.a. $\frac{| X_n - np |}{\sqrt{npq}}$ are repartiție normală standard.

Aceasta implică echivalențele

$$P\left(\frac{| X_n - np |}{\sqrt{npq}} < k\right) = 0,95 \qquad 2\Phi(k) = 0,95 \qquad k = 1,96 \ .$$

Prin urmare, X_n ia valori în intervalul $[np-1,96.\ (npq)^{1/2},\ np+1,96.\ (npq)^{1/2}]$, cu probabilitatea **0,95.** Făcând înlocuirile corespunzătoare, rezultă că numărul de piese bune se află în intervalul **[4875-21,63; 4875+21,63]** adică **[4853; 4896].**

§6. Corecția de continuitate

Convergența legii binomiale la o lege normală revine concret la faptul că extremitățile "batoanelor" diagramei binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ sunt

Scanned with OKEN Scanner

vecine curbei de densitate de probabilitate a unei legi de repartiţie de tip **N(np, npq)**. Se obţine deci o valoare aproximativă pentru **P(X = x)** prin suprafaţa de sub curba de densitate cuprinsă între dreptele corespunzătoare absciselor **x -½** şi **x + ½** (vezi **fig.14**).
Deci se face aproximarea

$$P(X = x) = P\left(\frac{x - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} < U < \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \right).$$

şi aproximarea

$$P(X \leq x) = P\left(U < \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}} \right).$$

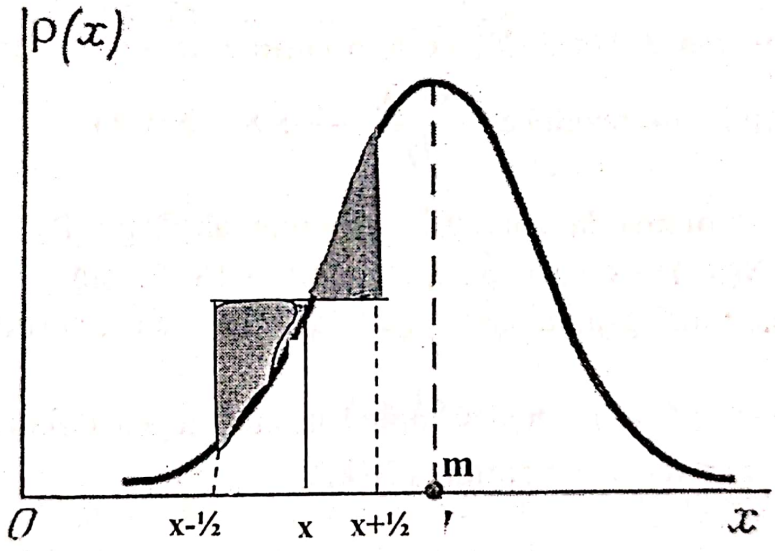


Fig. 14

Exemplul 9. Fie **X** o v.a. cu repartiţie $\mathcal{B}(40; 0,3)$, adică **np = 12, npq = 8,4**. Valoarea exactă pentru **P(X = 11)** este, conform tabelelor, **0,1319**. Formula aproximativă, bazată pe legea **N(12; 8,4)**, dă :

Scanned with OKEN Scanner

$$P\left(\frac{10,5 - 12}{\sqrt{8,4}} < U < \frac{11,5 - 12}{\sqrt{8,4}}\right) \approx P(-0,52 < U < -0,17) =$$

$$= P(0,17 < U < 0,52) = 0,6895 - 0,5675 = 0,131.$$

Deci aproximarea se realizează cu o eroare rezonabilă (< 1%). Pentru P(X = 11) se obține din tabele valoarea 0,4406 iar aproximarea normală dă 0,4325 = 1 - P(U < 0,17). În absența corecției de continuitate se obține

$$P\left(U < \frac{11 - 12}{\sqrt{8,4}}\right) = P(U < -0,35) = 0,3632.$$

ceea ce este **imprecis.**

Teorema 2. Dacă (X_λ) este o familie de v.a. cu repartiție $\mathcal{P}(\lambda)$ atunci pentru $\lambda \to \infty$ rezultă că $\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{r} X \in N(0,1)$.

Aproximarea în condițiile concrete ale legii Poisson printr-o lege de tip N(0, 1) este acceptabilă dacă $\lambda > 18$. Există și alte procedee de aproximare mai avantajoase. Și aici se poate face o corecție de continuitate.

În Fig. 15 se ilustrează modul în care legea Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ este aproximată de o repartiție normală $N(\lambda,\lambda)$.

Scanned with OKEN Scanner

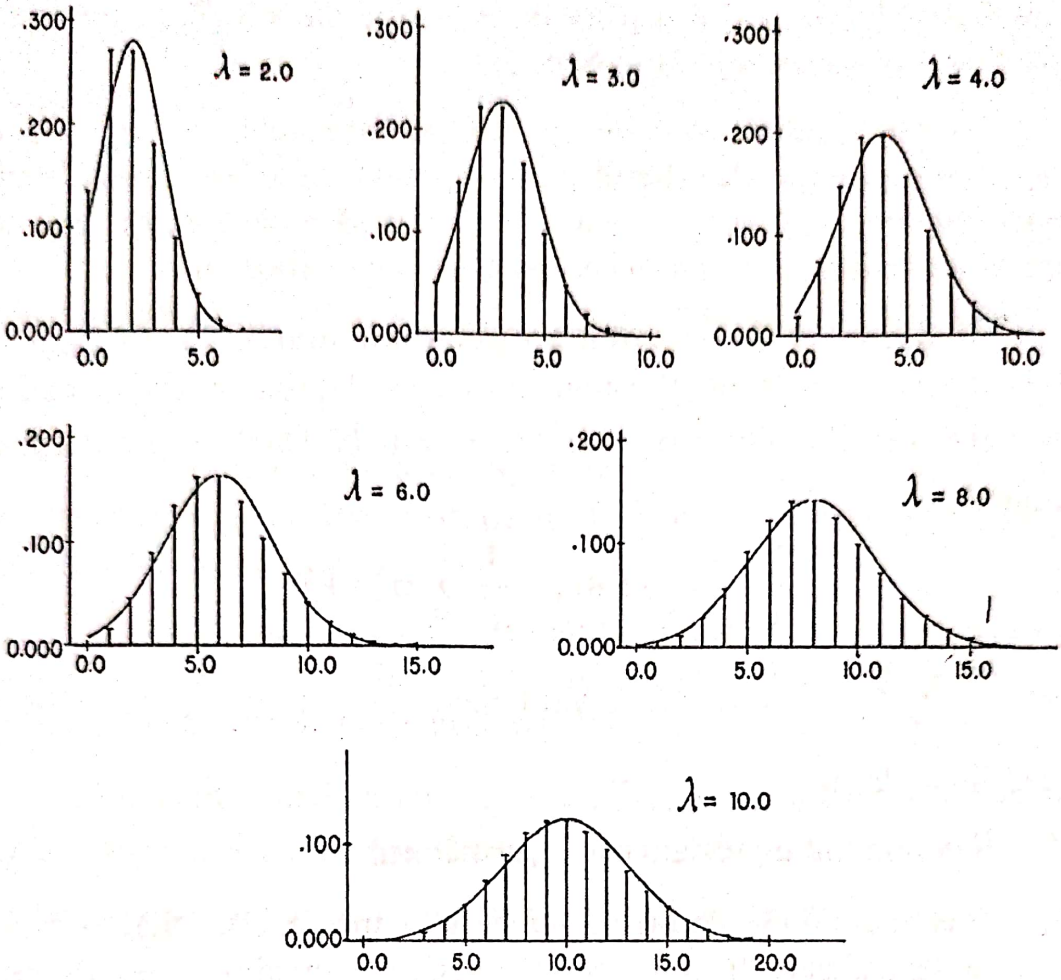


Fig.15

Cele două teoreme prezentate mai sus sunt cazuri particulare, întâlnite des în aplicații, ale teoremei următoare.

Teorema limită centrală. Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de v.a. independente, care au aceeaşi repartiție. Presupunem că există mediile $m_n=M(X_n)$ şi dispersiile $\sigma_n^2 = D^2(X_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi notăm

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad Z_n = \frac{Y_n - M(Y_n)}{\sqrt{\sigma_n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci şirul $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al funcţiilor de repartiţie ale v.a. Z_n converge în repartiţie la o v.a. cu repartiţie $N(0, 1)$.

Acest rezultat pretinde ca v.a. să aibă toate acelaşi tip de funcţie de repartiţie. Rezultatul următor, cunoscut şi ca *legea slabă a numerelor mari,* nu cere ca v.a. ale şirului să aibă aceeaşi lege dar impune o condiţie tare asupra comportării dispersiilor lor.

Teorema 3 (legea slabă a numerelor mari). Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de v.a. independente. Presupunem că există şi sunt finite mediile $m_n = M(X_n)$ şi dispersiile $\sigma_n^2 = D^2(X_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dacă sunt satisfăcute condiţiile

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \to m, \quad \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \to 0$$

atunci $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} m$ adică şirul mediilor aritmetice converge în probabilitate la m.

Un rezultat important este şi următorul.

Teorema 4 (legea tare a numerelor mari). Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de v.a. independente. Presupunem că există şi sunt finite mediile $m_n = M(X_n)$ şi dispersiile $\sigma_n^2 = D^2(X_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dacă $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \to m$ şi seria $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sigma_i^2}{i^2}$ este convergentă atunci $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} m$, adică şirul mediilor aritmetice converge aproape sigur la m.

Există un rezultat, datorat lui Leapunov, deosebit de important prin faptul că nu impune nici-o restricţie pentru funcţiile de repartiţie ale v.a. ale şirului.

Teorema lui Leapunov. Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de v.a. care satisfac condiţiile:

1) pentru orice $n>1$ v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt independente,

2) pentru orice $k\in\mathbb{N}$, există $M(X_k)$, $D^2(X_k)$, $H_k = M(|X_k - M(X_k)|^3)$,

Scanned with OKEN Scanner

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\sum_{k=1}^{n} H_k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D^2(X_k)}} = 0$.

În aceste condiţii şirul $\left(Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in N^*}$ converge în repartiţie la o v.a cu repartiţie **N(0, 1)**.

Primul rezultat de acest tip a fost demonstrat de către Cebîşev. Markov a completat demonstraţia lui Cebîşev iar Leapunov a generalizat rezultatele acestora.

Un alt rezultat, de aceeaşi natură cu teorema lui Leapunov dar mai apropiat de aplicaţiile în statistică ale teoriei probabilităţilor este datorat lui Lindeberg şi are următoarea formă.

Teorema lui Lindeberg. Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de v.a. independente pentru care există mediile $m_i=M(X_i)$ şi dispersiile $\sigma_i^2 = D^2(X_i)$. Notăm cu $F_i(x)$ funcţiile de repartiţie ale v.a. X_i-m_i şi definim

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 .$$

Dacă este satisfăcută condiţia

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{S_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int x^2 dF_i(x)\right] = 0$$

atunci şirul $\left(Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_i)}{S_n}\right)_{n\in N^*}$ converge în repartiţie la o v.a. de repartiţie **N(0, 1)**.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția lui Lindeberg exprimă faptul că variabilele $\frac{X_i - m_i}{S_n}$ sunt "uniform mici" cu o probabilitate apropiată de 1. Acest rezultat spune că prin cumularea acestor variabile se ajunge la o v.a. cu repartiție normală N(0,1). Prin urmare, dacă o v.a. este rezultatul cumulării unui număr mare de cauze mici, cu efect aditiv, ea va avea o repartiție normală.

Există și teoreme limită centrală pentru șiruri de vectori aleatori.

Teorema limită centrală multidimensională. Fie $(X_n)_{n\in N}$ un șir de vectori aleatori independenți cu **m** componente care au aceeași medie $\mu = [M(X_1) \quad M(X_2) \quad ... \quad M(X_m)]^T$ și aceeași matrice de covarianță Σ. Atunci

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \xrightarrow{r} X \in N(0,\Sigma).$$

Acest rezultat se aplică unui șir de vectori aleatori $(Y_n = (X_1, X_2, ..., X_m))_{n\in N^*}$ cu repartiție multinomială cu aceeași medie $\mu = [np_1 \; np_2 \; ... \; np_m]^T$ și aceeași matrice de covarianță Σ. Atunci

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - np_1, X_2 - np_2, ..., X_m - np_m) \xrightarrow{r} \xi \in N_m(0,\Sigma).$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{m}(X_i - np_i) = 0$ legea limită este degenerată, adică nu admite densitate. Suprimând ultima componentă se va obține un vector limită gaussian (cu repartiție normală) nedegenerat pentru care

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - np_1, X_2 - np_2, ..., X_{m-1} - np_{m-1}) \xrightarrow{r} \xi \in N_{m-1}(0,\Sigma^*)$$

unde Σ^* se obține din Σ renunțând la ultima linie și la ultima coloană. Prin proceduri standard se obține

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \in \chi^2_{m-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculul probabilităţilor oferă cadrul matematic pe care se dezvoltă statistica matematică. Legea numerelor mari ne arată modul şi măsura în care putem trage concluzii valabile, pe baza statisticii, cu privire la anumite categorii de fenomene. Trebuie menţionat că majoritatea teoremelor de convergenţă la v.a. constante sunt componente specifice ale legii numerelor mari. Atragem atenţia că nici teorema lui Bernoulli nici alte rezultate de acelaşi tip nu demonstrează stabilitatea fenomenelor, adică nu justifică regularitatea statistică care motivează aplicarea tehnicilor teoriei probabilităţilor în scopul modelizării fenomenului analizat. **Nu se poate considera că mărind mult numărul de efectuări ale unui experiment ne apropiem în mod necesar de proba bilitatea evenimentului analizat.** În fapt, legea numerelor mari nu este aplicabilă oricărui şir de v.a. ci numai acelora legate de experienţe în care se mani festă regularitatea statistică. În acest sens există un exemplu important datorat lui Markov (vezi [4], pag.157) care arată că există situaţii în care nu se poate face nici-o previziune asupra frecvenţelor relative chiar după un număr foarte mare de experienţe.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. **I. Burdujan** - *Matematici cu aplicaţii în Biologie*, Ed. „Ion Ionescu de la Brad", 1999

2. **I. Burdujan** - Elemente de *Matematici cu aplicaţii în Biologie*, Ed. „Vasiliana", 2001

3. **M. Micula** – *Matematici aplicate în agronomie*, Casa de editură TRANSILVANIA PRESS, CLUJ-NAPOCA 1997

4. **Gh. Mihoc, V. Urseanu** – *Matematici aplicate în statistică* Ed. Acad. R.P.R., 1962

5. **L. Răileanu** – Matematici cu aplicaţii în Biologie, Rotaprint Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, 1978

6. **L. Răileanu** –Tabele statistice, Rotaprint Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, 1978

7. **V. Tamaş, ş.a.** – Matematici generale pentru economişti, Ed. Graphix, Iaşi, 1993

8. **V. Tamaş, ş.a.** – Modele matematic în Economie, Ed. Graphix, Iaşi, 1995

Scanned with OKEN Scanner

ISBN: 973-85547-9-9

Scanned with OKEN Scanner